SPITZ

LEHRBUCH DER EBENEN

POLYGONOMETRIE

Lehrbuch

der

ebenen Polygonometrie.

Lehrbuch

der

ebenen Polygonometrie

nebst

Beispielen und Uebungsaufgaben

zum

Gebrauche an höheren Lehranstalten

und beim

Selbststudium

von

Dr. Carl Spitz,
Professor am Polytechnicum in Carlsruhe.

Mit 30 in den Text gedruckten Figuren.

Leipzig und Heidelberg.
C. F. Winter'sche Verlagshandlung.
1866.

Vorwort.

Vorliegendes Lehrbuch umfaßt die theoretische Begründung der für den Praktiker so wichtigen Sätze der ebenen Polygonometrie und ist zunächst für meine Zuhörer an der Forstschule des hiesigen Polytechnicums bestimmt. Dasselbe schließt sich an mein vor Kurzem in zweiter Auflage erschienenes Lehrbuch der ebenen Trigonometrie an, wie solches schon aus den darin durch E. T. angedeuteten Citaten zu erkennen ist. Den eigentlichen polygonometrischen Gleichungen habe ich eine verallgemeinerte Betrachtung der Polygone überhaupt vorausgeschickt, weil hier die in den betreffenden Sätzen der ebenen Geometrie gemachten Beschränkungen fallen müssen. Die zur Berechnung der Polygone erforderlichen Relationen sind stets sowohl in den Seiten und Azimuthen, als auch in den Seiten und Polygonwinkeln ausgedrückt, um den Studirenden mit beiden Verfahrungsarten bekannt zu machen. Die Transformation der Coordinaten habe ich etwas ausführlicher behandelt, als dieses sonst zu geschehen pflegt. Sämmtliche vorgetragene Sätze sind durch numerische Beispiele erläutert und am Schlusse befindet sich eine zur Selbstübung bestimmte Sammlung von Aufgaben.

Die Aufnahme der Polygone, Berichtigung von Fehlern, welche in der Vermessung ihren Grund haben u. dergl., habe ich nicht berührt, weil diese Gegenstände in dem Vortrage über praktische Geometrie ausführlich besprochen werden.

Carlsruhe, im September 1865.

C. Spitz.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.

Siebenter Abschnitt.

Erster Abschnitt.

Von den Polygonen im Allgemeinen.

§. 1. Entstehung und Benennung der Polygone.

1) Nimmt man in einer Ebene n Punkte an, bestimmt alsdann die Ordnung ihrer Aufeinanderfolge der Art, daß nie drei nacheinanderfolgende in gerader Linie liegen, und verbindet nun jeden Punkt mit dem nächstfolgenden und den letzten wieder mit dem ersten durch Strecken, so entsteht eine geradlinige Figur, welche man neck oder, ohne Rücksicht auf die Zahl der Punkte, allgemein Vieleck oder Polygon nennt.

Je nachdem $n = 3, 4, 5$ u. s. w. ist, erhält das Vieleck den besonderen Namen Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w.

2) Da die Aufeinanderfolge der gegebenen Punkte auf mannigfache Weise gewählt werden kann, so gibt es auch für jede Anzahl von Punkten verschiedene, dieser Zahl entsprechende Vielecke.

3) Die Anzahl aller necke, welche n Punkten von gegebener Lage, je nach der Wahl ihrer Aufeinanderfolge, entsprechen können, wird durch folgende Betrachtung erhalten. Jeder der n Punkte kann mit den übrigen $(n-1)$ Punkten auf $(n-1)$ Arten und jeder dieser Punkte mit jedem der noch freien $(n-2)$ Punkte auf $(n-2)$ Arten u. s. w. verbunden werden. Im Ganzen werden also auf diese Weise zwischen den n gegebenen Punkten

$$(n-1)(n-2)(n-3) \ldots . 4 . 3 . 2 . 1 .$$

gebrochene Linien gezogen werden können. Unter den hierdurch gebildeten necken tritt aber offenbar jede Form zweimal auf und

die wirkliche Anzahl aller zwischen n gegebenen Punkten möglichen n ecksformen ist somit nur

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 4.3.2.1}{2}$$

oder

$$\frac{(n-1)!}{2}$$

Hiernach hat man also

für $n = 3 : \frac{2!}{2} = \frac{2.1}{2} = 1$ Dreieck,

„ $n = 4 : \frac{3!}{2} = \frac{3.2.1}{2} = 3$ Vierecke,

„ $n = 5 : \frac{4!}{2} = \frac{4.3.2.1}{2} = 12$ Fünfecke,

„ $n = 6 : \frac{5!}{2} = \frac{5.4.3.2.1}{2} = 60$ Sechsecke

u. s. w.

4) Die einzelnen Punkte, durch deren Verbindung ein Polygon entsteht, heißen die **Eckpunkte**, jede Strecke, welche zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte verbindet, wird **Seite**, und jede von irgend zwei anderen Eckpunkten begrenzte Strecke **Diagonale** des Polygons genannt.

5) Hat man die Aufeinanderfolge der Eckpunkte des Polygons festgesetzt und denkt man sich alsdann jede Seite desselben um **den** Eckpunkt, welchen sie mit der nächstfolgenden Seite **gemeinschaftlich** hat, in einerlei Sinne so lange gedreht, bis sie mit dieser zusammenfällt, so bestimmt die Größe dieser Drehung jeweils den von zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Seiten gebildeten **Winkel** des betreffenden Polygons. Nimmt man die Drehung der Seiten desselben Polygons in einem dem vorigen entgegengesetzten Sinne vor, so erhält man ein **zweites** Polygon, das zwar in Bezug auf die Seiten mit jenem übereinstimmt, aber offenbar andere Polygonwinkel hat.

Jedes dieser beiden Polygone heißt das **Ergänzungs-** oder **Supplementpolygon** des anderen.

6) Jedem $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{concaven}}{\text{convexen}}$ Winkel eines Polygons entspricht ein $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{convexer}}{\text{concaver}}$ Winkel im Ergänzungspolygon, und umgekehrt. Die Summe aller Winkel eines n ecks macht mit der Summe der Winkel des supplementären n ecks zusammen 4nR aus.

7) Verlängert man sämmtliche Seiten eines Polygons in dem durch die Aufeinanderfolge der Eckpunkte angedeuteten Sinne und denkt sich nun jede Seite um den mit der nächst vorangehenden Seite gemeinschaftlichen Eckpunkt in dem bei Erzeugung der Polygonwinkel gleichen Sinne so lange gedreht, bis sie mit der Verlängerung eben dieser nächst vorangehenden Seite zusammenfällt, so bedingt die Größe dieser Drehung jeweils den an der betreffenden Ecke liegenden **Außenwinkel** des Vielecks. Einem $\frac{\text{concaven}}{\text{converen}}$ Polygonwinkel entspricht hiernach stets auch ein $\frac{\text{concaver}}{\text{converer}}$ Außenwinkel, und umgekehrt.

8) Da man nach Vorhergehendem bei Erzeugung der Polygon- und Außenwinkel die Drehungsrichtung willkührlich annehmen kann, wenn man nur die einmal angenommene Erzeugungsart für beide durchweg beibehält, so wird es zweckmäßig sein, um allen etwaigen Mißverständnissen für die Folge vorzubeugen, sogleich hier festzusetzen, in welcher Weise man sich bei allen nachkommenden Betrachtungen die besagten Winkel entstanden zu denken hat.

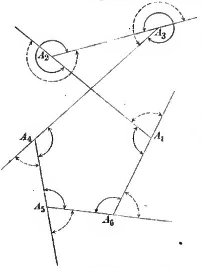
Hierzu diene folgende Erläuterung:

> **Die Ordnung in Betreff der Aufeinanderfolge der Eckpunkte eines Polygons ist immer in der Weise vorzunehmen, daß ein sich innerhalb des von zwei aufeinanderfolgenden concaven Winkeln gebildeten Flächenraumes befindlicher Beschauer die Nummern von rechts gegen links in aufsteigender Reihenfolge vor sich sieht. Die Polygon- und Außenwinkel hat man sich stets in dem durch die Bewegung der Zeiger einer Uhr ausgedrückten, also in einem der Nummernfolge der Eckpunkte entgegengesetzten Drehungssinne erzeugt zu denken.**

Bezeichnen wir also durch $A_1, A_2, A_3, \ldots A_6$ der Reihe nach die aufeinanderfolgenden Eckpunkte des Sechsecks Fig. 1, so geben die durch ununterbrochene Bogen bezeichneten Winkel die **Polygonwinkel** an, während die durch gestrichelte Bogen

kenntlich gemachten Winkel die entsprechenden *Außenwinkel* des Sechsecks andeuten. In beiden Fällen bezeichnen die an den Bogen befindlichen Pfeile die oben angeführte Drehungsrichtung.

Fig. 1.



9) Durch bloße Anschauung der vorstehenden Figur ergibt sich sofort der Satz:

Ein Polygonwinkel beträgt mit seinem Außenwinkel entweder $2\mathfrak{R}$ oder $6\mathfrak{R}$, je nachdem jener concav oder convex ist.

§. 2. Summe der Winkel eines Polygons.

1) Bildet man die Außenwinkel eines Polygons, zieht hierauf von irgend einem Punkte aus mit der Verlängerung der ersten Seite in gleichem Sinne einen parallelen Strahl und denkt sich diesen in einer Drehrichtung, welche der bei Erzeugung der Polygon- und Außenwinkel *entgegengesetzt* ist, um jenen Punkt so lange gedreht, bis er mit der Verlängerung der zweiten Seite gleichsinnig parallel geht, und von dieser Lage aus wieder so lange in derselben Weise, bis er parallel mit der Verlängerung der dritten Seite ist, u. s. f. bis der Strahl der Reihe nach alle Außenwinkel um seinen Anfangspunkt herum erzeugt und nach Erzeugung des letzten derselben wieder seine ursprüngliche Lage angenommen hat; so erkennt man sofort, daß derselbe während jener Bewegung entweder *einmal* $4\mathfrak{R}$, oder ein *ganzes Vielfache* von $4\mathfrak{R}$ durchlaufen haben wird.

Bezeichnet also $\Sigma(\beta)$ die Summe aller Außenwinkel eines *n*ecks, z die Anzahl der ihr entsprechenden vollen Winkel, so folgt:

$$\Sigma(\beta_n) = 4z\mathfrak{R} \ldots\ldots (1).$$

Anmerkung. Bei einem $n$eck, das nur concave Winkel hat, ist $z = 1$, also $\Sigma(\beta) = 4\Re$. (Vergl. E. G. §. 47.)

2) Ist nun c die Anzahl aller converen, also $(n-c)$ die aller concaven Winkel eines $n$ecks, $\Sigma(A_n)$ die Summe aller Polygonwinkel desselben, so erhält man nach §. 1. 9.

$$\Sigma(A_n) + \Sigma(\beta_n) = 6c\Re + 2(n-c)\Re$$
$$= 2(2c+n)\Re$$

und es bleibt somit nach (1) für die Summe aller Polygonwinkel

$$\Sigma(A_n) = 2(2c+n)\Re - 4z\Re$$
$$= 2n\Re + 4(c-z+1)\Re - 4\Re$$
$$= 2(n-2)\Re + 4(c-z+1)\Re$$

oder, wenn man

$$c - z + 1 = m$$

setzt,

$$\Sigma(A_n) = 2(n-2)\Re + 4m\Re \ldots\ldots (2)$$

3) Wenn in einem Polygone außer den Seiten, welche einen Eckpunkt gemeinschaftlich haben, nie zwei andere einander unmittelbar schneiden, so ist stets

$$z = c + 1 \text{ oder } m = 0$$

und man erhält in diesem Falle die schon aus der ebenen Geometrie (§. 46) bekannte Gleichung

$$\Sigma(A_n) = 2(n-2)\Re = 2n\Re - 4\Re \ldots (3).$$

4) Sind also in einem $n$ecke $(n-1)$ Winkel gegeben, so läßt sich der $n$te Winkel nach einer der Gleichungen (2) und (3) leicht berechnen. Welche von beiden anzuwenden ist, läßt sich in jedem einzelnen Falle leicht entscheiden. Ist nämlich die Summe der $(n-1)$ gegebenen Winkel oder $\Sigma(A_{n-1})$ kleiner als $2(n-2)\Re$, so lege man bei der Bestimmung des $n$ten Winkels A_n die Gleichung (3) zu Grunde und setze

$$A_n = 2(n-2)\Re - \Sigma(A_{n-1}).$$

Ist aber die Summe $\Sigma(A_{n-1})$ größer als $2(n-2)\Re$, dagegen kleiner als $2(n-2)\Re + 4\Re$, so wende man die Gleichung (2) an, indem man darin $m = 1$ setzt; fällt ferner $\Sigma(A_{n-1})$ zwischen $2(n-2)\Re + 4\Re$ und $2(n-2)\Re + 2.4\Re$, so setze man in Gl. (2) $m = 2$ u. s. w.

Sollte die Summe der $(n-1)$ gegebenen zwischen $2(n-2)\Re - 4\Re$ und $2(n-2)\Re - 2.4\Re$ fallen, so hat man ebenfalls Gl. (2) in Anwendung zu bringen und darin $m = -1$ zu setzen u. s. f.

Sind z. B. in einem Fünfecke $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ die Winkel: $A_1 = 55^\circ$, $A_2 = 300^\circ$, $A_3 = 338^\circ$, $A_4 = 84^\circ$, so ist $\Sigma(A_4) = 55^\circ + 300^\circ + 338^\circ + 84^\circ = 777^\circ$, also größer als $2(5-2)\mathfrak{R}$ oder $6\mathfrak{R}$, dagegen kleiner als $6\mathfrak{R} + 4\mathfrak{R}$ oder $10\mathfrak{R}$. Setzt man deshalb in Gl. (2) $m = 1$, so folgt für

$$\Sigma(A_5) = 900^\circ.$$

Hiervon ab $\Sigma(A_4) = 777^\circ$

bleibt für $\measuredangle A_5 = 123^\circ$.

Sind in einem anderen Falle vier Winkel eines (sternförmigen) Fünfecks: 23°, 60°, 45° und 30°, ist also deren Summe oder $\Sigma(A_4) = 23^\circ + 60^\circ + 45^\circ + 30^\circ = 158^\circ$ kleiner als $2(5-2)\mathfrak{R} - 4\mathfrak{R}$, dagegen größer als $2(5-2)\mathfrak{R} - 2 . 4\mathfrak{R}$, so folgt, wenn man in Gl. (2) $m = -1$ setzt, für

$$\Sigma(A_5) = 2(5-2)\mathfrak{R} - 4\mathfrak{R} = 180^\circ$$

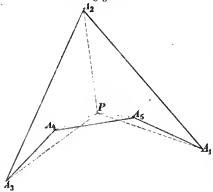
$$\Sigma(A_4) = 158^\circ$$

also für $\measuredangle A_5 = 22^\circ$

§. 3. Zerlegung der Polygone in Dreiecke.

1) Nimmt man im Inneren eines n ecks, das nur concave Winkel hat und bei welchem außer den die Eckpunkte bildenden Seiten nie zwei andere einander unmittelbar schneiden, einen Punkt an und verbindet diesen mit den Eckpunkten desselben, so entstehen bekanntlich n Dreiecke, deren Inhalte zusammen den Inhalt des n ecks ausmachen. Hat das Vieleck aber convexe Winkel, so läßt sich nicht in allen Fällen innerhalb desselben ein Punkt von solcher Lage angeben, daß man von ihm aus nach allen Eckpunkten Strecken ziehen kann, welche sämmtlich ganz in das Innere der Figur fallen.

Fig. 2.



2) Um nun zu untersuchen, auf welche Weise man in solchen Fällen aus den betreffenden Dreiecks-

inhalten den Inhalt des Polygons erhält, sei (Fig. 2) $A_1A_2A_3A_4A_5$ irgend ein Fünfeck, dessen Winkel A_4 und A_5 convex sein mögen und P der im Inneren angenommene Punkt von solcher Lage, daß die Verbindungsstrecken PA_1 und PA_3 theilweise außerhalb des Polygons fallen. Es wird, wie man sich durch den Anblick der Figur überzeugt, in diesem Falle der Inhalt des Fünfecks

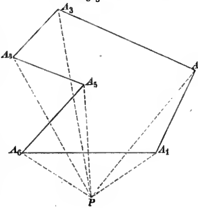
$$= \triangle PA_1A_2 + \triangle PA_2A_3 - \triangle PA_3A_4 + \triangle PA_4A_5 - \triangle PA_5A_1$$

so daß also einige der Dreiecke bei der Summirung negativ in Rechnung zu bringen sind.

Um zu erfahren, welche von den Dreiecken negativ zu nehmen seien, lassen wir die erste Verbindungsstrecke PA_1 sich um den Punkt P über die erste Seite A_1A_2 hin in die Lage der zweiten Strecke PA_2 und von hier aus in gleicher Weise an der Seite A_2A_3 hin nach PA_3 bewegen. Man erkennt alsdann sogleich, daß wenn sich nun die Strecke PA_3 in der angegebenen Weise, nämlich an A_3A_4 hin nach PA_4 bewegen soll, sie eine der bisherigen entgegengesetzte Drehung machen muß. Dasselbe findet bei einer drehenden Bewegung von der Lage PA_5 aus in die Lage PA_1 statt. Nun sind aber eben die über A_3A_4 und A_5A_1 construirten Dreiecke diejenigen, welche in obiger algebraischen Summe negativ auftreten.

3) Zu einem damit übereinstimmenden Resultate gelangt man auch, wenn der Punkt P außerhalb des Polygons angenommen wird. So folgt z. B. für das Sechseck $A_1A_2\ldots A_6$ (Fig. 3) $= \triangle PA_1A_2 + \triangle PA_2A_3 + \triangle PA_3A_4 - \triangle PA_4A_5 + \triangle PA_5A_6 - \triangle PA_6A_1$. Und in der That macht wieder die von PA_1 über $A_2, A_3, \ldots A_6$ sich um P in dem durch die Aufeinanderfolge der Eckpunkte bedingten Drehungssinne bewegte Strecke, um von PA_4 aus in die Lage von PA_5 und von

Fig. 3.



PA_6 in die von PA_1 zu gelangen, eine den übrigen Bewegungen entgegengesetzte Drehung.

4) Wir gelangen hiernach zu folgendem allgemeinen Satze:

Zieht man von irgend einem in der Ebene eines Polygons gelegenen Punkte aus Strecken nach den Eckpunkten desselben, so ist der Inhalt dieses Polygons gleich der algebraischen Summe der Inhalte der über den einzelnen Seiten entstandenen Dreiecke, wobei alle diejenigen Dreiecke negativ in Rechnung zu bringen sind, bei welchen ein von jenem Punkte ausgehender und sich um diesen successiv nach den aufeinanderfolgenden Eckpunkten bewegender Strahl eine der durch die Aufeinanderfolge vorgezeichneten Drehrichtung entgegengesetzte Drehung machen muß, um vom Anfangspunkte nach dem Endpunkte der betreffenden Polygonseite zu gelangen.

5) Derselbe Satz gilt natürlich auch dann noch, wenn außer den angrenzenden Seiten auch noch andere Seiten des Polygons einander unmittelbar schneiden. So ist z. B. das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ (Fig. 4) $= \triangle PA_1A_2 - \triangle PA_2A_3 + \triangle PA_3A_4 - \triangle PA_4A_1$.

Fig. 4.

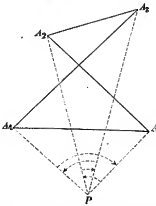
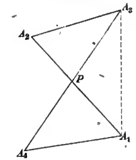


Fig. 5.



6) Verlegt man den Punkt P nach dem Durchschnittspunkte der Seiten A_1A_2 und A_3A_4 (Fig. 5), so ergibt sich für den Inhalt

des Vierecks: $\triangle PA_1A_2 - \triangle PA_2A_3 + \triangle PA_3A_4 + \triangle PA_4A_1$
$= 0 - \triangle PA_2A_3 + 0 + \triangle PA_4A_1$
$= -\triangle PA_2A_3 + \triangle PA_4A_1$.

7) Nimmt man A_1 als den Punkt an, von welchem aus die Zerlegung stattfindet, so ist der Inhalt des Vierecks $= \triangle A_1A_2A_3 - \triangle A_1A_3A_4$.

8) Man ersieht hieraus, daß der Inhalt eines derartigen Polygons Null werden kann, und hierin liegt gerade das Wesen solcher verschlungenen Polygone.

§. 4. Von den Bestimmungsstücken eines Polygons.

1) Ein neck ist entweder unzweideutig, oder zweideutig bestimmt, wenn von seinen $2n$ Elementen (Seiten und Winkeln) $(2n-3)$ gegeben sind und die fehlenden drei Elemente gewissen Bedingungen entsprechen, oder nicht. Wir haben nun zunächst zu untersuchen, welches die fehlenden Elemente sein können und welche Bedingungen dieselben erfüllen müssen, damit das neck vollkommen durch die gegebenen Stücke bestimmt sei.

2) Die fehlenden drei Elemente können aber sein:
1. eine Seite und zwei Winkel;
2. zwei Seiten und ein Winkel;
3. drei Seiten;
4. drei Winkel.

In Bezug auf die Anordnung dieser Stücke sind jedoch wieder mehre Fälle möglich, welche wir nun der Reihe nach näher betrachten wollen.

Erster Fall. Gegeben alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf zwei.

Erste Voraussetzung. Die fehlenden Winkel liegen an der fehlenden Seite.

Nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie (E. G. §. 78) ist in diesem Falle das Polygon unzweideutig bestimmt, wenn überhaupt die gegebenen Elemente die Bildung eines solchen zulassen.

Zweite Voraussetzung. Die beiden fehlenden Winkel liegen an einer unmittelbar auf die unbekannte Seite folgenden Seite.

Es seien z. B. A_2 und A_3 die fehlenden Winkel, also A_1A_2

die unbekannte Seite. Denkt man sich die Diagonale A_1A_3 gezogen, so entsteht ein nach der ersten Voraussetzung vollkommen bestimmbares Polygon $A_1A_3A_4 \ldots A_n$ und ein Dreieck $A_1A_2A_3$. Von diesem kennt man alsdann zwei Seiten A_2A_3, A_1A_3 und den der Seite A_2A_3 gegenüberliegenden Winkel $A_2A_1A_3$. Da nun nach E. G. §. 60. Zus. 1 im Allgemeinen dieses Dreieck zwei Auflösungen zuläßt, so ist das Polygon selbst nicht vollkommen bestimmt.

Dritte Voraussetzung. Einer der fehlenden Winkel liegt der Seite an, der andere nicht und getrennt von diesem.

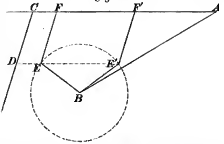
Angenommen es seien A_3 und A_7 die fehlenden Winkel, A_2A_3 die fehlende Seite. Denkt man sich die Diagonalen A_2A_7 und A_3A_7 gezogen, so wird das Polygon in zwei andere Polygone und ein Dreieck zerlegt. Jene sind nach Vorhergehendem vollkommen bestimmt, von dem Dreiecke $A_2A_3A_7$ kennt man aber die zwei Seiten A_2A_7 und A_3A_7 und den der Seite A_3A_7 gegenüberliegenden Winkel $A_3A_2A_7$ und dieses ist somit im Allgemeinen nach E. G. §. 60 nicht unzweideutig construirbar. Es können demnach auch unter der obigen Voraussetzung den gegebenen Elementen zwei Polygone genügen.

Vierte Voraussetzung. Die fehlenden Winkel liegen nicht an der fehlenden Seite.

Es seien z. B. A_6 und A_9 die fehlenden Winkel, A_2A_3 die fehlende Seite. Denkt man sich die Diagonalen A_3A_9, A_2A_9 und A_6A_9 gezogen, so entstehen die vier Polygone $A_3A_4A_5A_6$, $A_6A_7A_8A_9$, $A_1A_2A_9A_{10}$.... und $A_2A_3A_6A_9$, von welchen die drei ersten nach der ersten Voraussetzung vollkommen bestimmt sind. Man kennt somit von dem Vierecke $A_2A_3A_6A_9$ die drei Seiten A_3A_6, A_6A_9 und A_9A_2, sowie die an der unbekannten Seite liegenden Winkel $A_9A_2A_3$ und $A_2A_3A_6$. Im Allgemeinen lassen sich aber aus diesen fünf Elementen zwei verschiedene Vierecke construiren. Denn trägt man (Fig. 6) $AB = A_2A_9$ an, macht $\measuredangle BAC = \measuredangle A_9A_2A_3$, beschreibt von B aus mit der Seite A_6A_9 einen Kreis, construirt an AC in irgend einem Punkte C den $\measuredangle ACD = \measuredangle A_2A_3A_6$, macht $CD = A_3A_6$ und zieht durch D eine Parallele zu CA, so wird diese den Kreis im Allgemeinen in zwei Punkten E und E' schneiden. Zieht man nun durch diese

Punkte Parallelen zu DC, so erhält man im Allgemeinen zwei verschiedene Vierecke AFEB und AF'E'B, welche den gegebenen Forderungen genügen. Ist $\sphericalangle A_1A_2A_3$ so beschaffen, daß die Parallele DE den Kreis berührt, so erhält man nur ein Viereck.

Fig. 6.



Wir ersehen hieraus, daß obige Voraussetzung das Polygon im Allgemeinen unbestimmt läßt.

Fünfte Voraussetzung. Die beiden fehlenden Winkel liegen an ein und derselben bekannten Seite.

Es seien z. B. A_5, A_6 die fehlenden Winkel und A_1A_2 die unbekannte Seite, denkt man sich die Diagonalen A_2A_5 und A_1A_6 gezogen, so entstehen zwei nach der ersten Voraussetzung unzweideutig bestimmbare Polygone $A_2A_3A_4A_5$ und $A_1A_6A_7 \ldots A_n$ und ein Viereck $A_1A_2A_5A_6$. Von diesem kennt man nun die drei Seiten A_2A_5, A_5A_6, A_6A_1 und die Winkel $A_6A_1A_2$, $A_5A_2A_1$. Nach dem in der vierten Voraussetzung Mitgetheilten läßt dieses Viereck aber im Allgemeinen zwei Auflösungen zu, also ist das Polygon bei den gegebenen Bedingungen ebenfalls nicht vollkommen bestimmt.

Zweiter Fall. Gegeben alle Seiten bis auf zwei und alle Winkel bis auf einen.

Der fehlende Winkel ist stets auf die in §. 2. 4. angegebene Weise leicht zu bestimmen, so daß wir nur nachstehende Voraussetzungen in Betreff der fehlenden Seiten näher zu betrachten haben.

Erste Voraussetzung. Die fehlenden Seiten liegen aneinander.

Sind z. B. A_1A_2 und A_2A_3 die fehlenden Seiten und man denkt sich die Diagonale A_1A_3 gezogen, so zerfällt das Polygon in ein Vieleck $A_1A_3A_4 \ldots A_n$ und in ein Dreieck

$A_1A_2A_3$, welche beide vollkommen bestimmt sind. Somit ist es auch das vorgelegte Polygon selbst.

Zweite Voraussetzung. Die fehlenden Seiten liegen getrennt.

Sind z. B. A_1A_2 und A_6A_7 die fehlenden Seiten und man denkt sich die beiden Diagonalen A_1A_7 und A_2A_6 gezogen, so wird das Polygon in zwei Polygone und ein Viereck $A_1A_2A_6A_7$ zerlegt, von welchen jene beiden vollkommen bestimmt sind. Von dem Vierecke $A_1A_2A_6A_7$ kennt man nun die zwei Seiten A_2A_6 und A_7A_1, und alle Winkel, also ist auch dieses unzweideutig bestimmt. Es gibt demnach in vorliegendem Falle nur ein Polygon, welches den verlangten Bedingungen entspricht.

Dritter Fall. Gegeben alle Seiten bis auf drei.

Erste Voraussetzung. Die drei fehlenden Seiten folgen unmittelbar aufeinander.

Sind A_1A_2, A_2A_3 und A_3A_4 die fehlenden Seiten und man denkt sich die Diagonale A_1A_4 gezogen, so entsteht ein vollkommen bestimmtes Polygon $A_1A_4A_5A_6 \ldots . A_n$ und ein Viereck $A_1A_2A_3A_4$, in welchem man eine Seite A_3A_4 und die vier Winkel kennt. Diesen Elementen genügen aber unendlich viele Vierecke, folglich bleibt das Polygon unter der gemachten Voraussetzung gänzlich unbestimmt.

Zweite Voraussetzung. Zwei der fehlenden Seiten liegen aneinander, die dritte davon getrennt.

Sind A_1A_2, A_6A_7, A_7A_8 die fehlenden Seiten und man denkt sich die Diagonalen A_2A_6 und A_1A_8 gezogen, so entstehen zwei absolut bestimmte Polygone $A_2A_3A_4A_5A_6$ und $A_1A_8A_9 \ldots . A_n$ und ein Fünfeck $A_1A_2A_6A_7A_8$, in welchem man die Seiten A_1A_8, A_2A_6, sowie alle Winkel kennt. Ueber jede beliebige Strecke, als A_1A_2 angenommen, läßt sich aber ein jene Elemente enthaltendes Fünfeck construiren. Dieses ist somit ganz unbestimmt, also ist es auch das Polygon selbst.

Dritte Voraussetzung. Die drei fehlenden Seiten liegen getrennt.

Sind A_1A_2, A_6A_7 und $A_{10}A_{11}$ die drei fehlenden Seiten und man denkt sich die Diagonalen A_2A_6, A_7A_{10}, $A_{11}A_1$ gezogen, so zerfällt das Polygon in drei andere vollkommen be-

stimmbare und in ein Sechseck $A_1A_2A_6A_7A_{10}A_{11}A_1$, von welchem man drei getrennt liegende Seiten A_2A_6, A_7A_{10}, $A_{11}A_1$ und die Winkel kennt. Da sich nun im Allgemeinen über jede Strecke aus diesen Elementen ein Sechseck zeichnen läßt, so ist in vorliegendem Falle das ursprüngliche Polygon nicht unzweideutig bestimmt.

Vierter Fall. Gegeben alle Winkel bis auf drei.

Erste Voraussetzung. Die fehlenden Winkel folgen unmittelbar nacheinander.

Sind A_1, A_2, A_3 die fehlenden Winkel und man denkt sich die Diagonale A_1A_3 gezogen, so entsteht ein vollkommen bestimmtes Polygon $A_1A_3A_4 \ldots A_n$ und ein Dreieck $A_1A_2A_3$, in welchem man die drei Seiten kennt. Da man aber über A_1A_3 mit den Seiten A_1A_2 und A_2A_3 zwei der Lage nach sich unterscheidende Dreiecke construiren kann, so ist im Allgemeinen das Polygon unter der gemachten Voraussetzung zweideutig gegeben.

Zweite Voraussetzung. Zwei der fehlenden Winkel folgen unmittelbar nacheinander, der dritte liegt getrennt von beiden.

Sind z. B. A_1, A_6 und A_7 die unbekannten Winkel und man denkt sich die Diagonalen A_1A_6 und A_1A_7 gezogen, so zerfällt das Polygon in zwei andere unzweideutig construirbare Polygone $A_1A_2A_3 \ldots A_6$, $A_1A_7A_8 \ldots A_n$ und in ein Dreieck $A_1A_6A_7$, von welchem man nun die drei Seiten kennt und somit in Bezug auf dessen Lage die bei vorhergehender Voraussetzung gemachte Bemerkung gilt. Kennt man die Lage dieses Dreiecks, so ist das Polygon bestimmt, im Allgemeinen giebt es jedoch zwei solcher, welche obiger Bedingung genügen.

Dritte Voraussetzung. Die drei fehlenden Winkel liegen getrennt.

Sind A_1, A_6, A_{11} die unbekannten Winkel und man denkt sich die Diagonalen A_1A_6, A_1A_4, A_6A_{11} gezogen, so entstehen drei vollkommen bestimmte Polygone und ein Dreieck $A_1A_6A_{11}$, von welchem man nun die drei Seiten kennt. Es gilt somit wieder das vorhin Gesagte, so daß auch in vorliegendem Falle das Polygon im Allgemeinen unbestimmt ist.

3) Fassen wir die in Vorstehendem gewonnenen Resultate zusammen, so ersehen wir, daß ein neck durch $(2n-3)$ gegebene Elemente nur dann unzweideutig bestimmt ist, wenn die fehlenden drei Stücke sind:

a) zwei beliebige Seiten und irgend ein Winkel,
b) eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel.

Anmerkung. Es mag hier noch des zuweilen vorkommenden Falles Erwähnung geschehen, daß ein Polygon auch bestimmt ist, wenn man alle Seiten und alle Winkel bis auf zwei kennt. Man überzeugt sich davon leicht, wenn man sich die Scheitel der zwei unbekannten Winkel durch eine Diagonale verbunden denkt. Es entstehen alsdann zwei Polygone von der unter b. angeführten Beschaffenheit.

4) Wir haben in Vorhergehendem gesehen, unter welchen Bedingungen ein Polygon aus gegebenen Seiten und Winkeln bestimmt ist, sich dasselbe also auch graphisch darstellen läßt. Da aber das sich hierauf stützende Constructionsverfahren in Bezug auf Genauigkeit viel zu wünschen übrig läßt, so haben wir uns zunächst nach einer tauglicheren Bestimmungsweise der einzelnen Eckpunkte eines Polygons umzusehen. Das geeignetste Mittel hierzu liefert uns die Bestimmung der Lage eines Punktes mittelst Coordinaten, weshalb wir sogleich auf diesen Gegenstand näher eingehen wollen.

Zweiter Abschnitt.

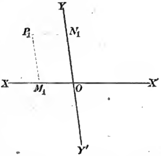
Bestimmung der Lage eines Punktes durch seine Coordinaten.

---

§. 5. Schiefwinkliges und rechtwinkliges Coordinatensystem.

Es seien (Fig. 7) XX′ und YY′ zwei ihrer Lage nach bekannte feste Gerade, welche einander in O schneiden, P_1 ein in der Ebene derselben innerhalb des Winkelraumes YOX liegender Punkt, so ist offenbar die Lage dieses Punktes P_1 vollkommen bestimmt, wenn man sowohl die Größe der zu YY′ parallelen Strecke P_1M_1, als auch die Größe der zu XX′ parallelen Strecke $P_1N_1 = M_1O$ kennt. Denn ist z. B. $P_1N_1 = a$, $P_1M_1 = b$ und man macht $OM_1 = a$, $ON_1 = b$ und zieht $M_1P_1 // OY$ und $N_1P_1 // OX$, so schneiden beide einander in dem Punkte P_1.

Fig. 7.



2) Die Strecken P_1M_1 und P_1N_1 heißen die **Coordinaten** des Punktes P_1 und insbesondere wird auch $P_1M_1 = N_1O$ die **Ordinate**, dagegen $P_1N_1 = M_1O$ die **Abscisse** eben dieses Punktes P_1 genannt und in der Regel diese durch x, jene durch y bezeichnet.

Der innerhalb des Winkelraumes YOX liegende Punkt P_1 ist somit durch die Gleichungen

$$x = a,\ y = b$$

vollkommen bestimmt.

Die beiden festen Geraden XX′ und YY′ heißen die Coordinatenachsen und insbesondere führt diese den Namen Ordinatenachse, während jene Abscissenachse heißt.

Den Durchschnittspunkt O der Coordinatenachsen nennt man Anfangspunkt oder Ursprung der Coordinaten, den von ihnen gebildeten Winkel Coordinatenwinkel.

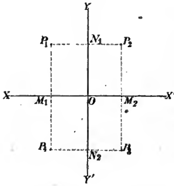
Je nachdem dieser Winkel ein schiefer, oder ein rechter ist, erhält man ein schiefwinkliges, oder ein rechtwinkliges Coordinatensystem.

3) Da die Annahme der Coordinatenachsen im Allgemeinen willkürlich ist und die Untersuchungen bei Zugrundelegung eines rechtwinkligen Coordinatensystems wesentlich vereinfacht werden, so werden sich in der Folge, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil angeführt sein sollte, unsere Betrachtungen stets nur auf rechtwinklige Coordinaten beziehen.

§. 6. Richtungszeichen der Coordinaten.

1) Wir haben oben angenommen, daß von den vier Winkelräumen, in welche die Ebene durch die Coordinatenachsen getheilt wird, derjenige bekannt sei, welcher den zu bestimmenden Punkt enthält. Kennt man aber nur die Coordinaten eines Punktes ihrer absoluten Größe nach, so leuchtet unmittelbar ein, daß in diesem Falle die Lage des Punktes noch zweifelhaft ist, indem jedem der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 8) dieselben Coordinaten der absoluten Länge nach entsprechen können.

Fig. 8.



Hieraus erkennt man die Nothwendigkeit, den Coordinaten zugleich besondere Richtungszeichen beizugeben, um dadurch zugleich denjenigen der vier durch die Coordinatenachsen gebildeten Quadranten zu kennzeichnen, in welchen der zu bestimmende Punkt fällt.

2) Bezeichnen wir nun hier und in der Folge die von O aus links gegen X und aufwärts gegen Y hin genommenen Richtungen als die vom Anfangspunkte O ausgehenden positiven Richtungen der Coordinatenachsen, also die ihnen entgegengesetzten Richtungen OX′ und OY′ als die negativen und nennen die Winkelräume

YOX, YOX′, Y′OX′, Y′OX

der Reihe nach den

ersten, zweiten, dritten, vierten

Quadranten, so hat man stets zu setzen:

α) beide Coordinaten positiv, wenn der Punkt im ersten Quadranten liegt;

β) die Abscisse negativ, die Ordinate positiv, wenn der Punkt im zweiten Quadranten liegt;

γ) beide Coordinaten negativ, wenn der Punkt im dritten Quadranten liegt;

δ) die Abscisse positiv, die Ordinate negativ, wenn der Punkt im vierten Quadranten liegt.

3) Umgekehrt schließen wir hieraus, daß ein Punkt liege

α) im ersten Quadranten, wenn beide Coordinaten positiv sind;

β) im zweiten Quadranten, wenn die Abscisse negativ, die Ordinate positiv ist;

γ) im dritten Quadranten, wenn beide Coordinaten negativ sind;

δ) im vierten Quadranten, wenn die Abscisse positiv, die Ordinate dagegen negativ ist.

4) Sind nun P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig. 8) vier Punkte, welche bezüglich in den vier aufeinander folgenden Quadranten liegen, und entspricht jedem derselben absolut genommen die Abscisse a und die Ordinate b, so hat man also behufs unzweideutiger Lagebestimmung zu setzen:

für Punkt $P_1 : x = a, \quad y = b,$
" " $P_2 : x = -a, y = b,$
" " $P_3 : x = -a, y = -b,$
" " $P_4 : x = a, \quad y = -b.$

5) Je nachdem ein Punkt in der positiven oder negativen Hälfte der Abscissenachse liegt, erhält man dafür die Gleichungen

$$x = a,\ y = o \text{ und } x = -a,\ y = o$$

und je nachdem er in der positiven oder negativen Hälfte der Ordinatenachse liegt:

$$x = o,\ y = b \text{ und } x = o,\ y = -b.$$

Fällt der Punkt mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammen, so folgt dafür

$$x = o,\ y = o.$$

6) Um allgemein einen Punkt zu bezeichnen, dessen Coordinaten x und y sind, setzt man kurzweg: **Punkt (xy).**

7) Es ist klar, daß wenn man die Coordinaten sämmtlicher Eckpunkte eines Polygons in Bezug auf einerlei Coordinatenachsen kennt, das Polygon vollkommen bestimmt und leicht construirbar ist.

§. 7. Beispiele.

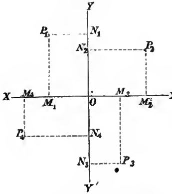
1) Die Abscisse eines Punktes sei 5,8 und dessen Ordinate 7,4; man soll die Lage des Punktes bestimmen.

Auflösung.

Ziehe zwei einander rechtwinklig schneidende Coordinatenachsen XX′, YY′ (Fig. 9) und trage nun nach einem angenommenen Maßstabe $OM_1 = 5{,}8$, $ON_1 = 7{,}4$ auf; so ist der Durchschnittspunkt P_1 der durch M_1 und N_1 zu den Coordinatenachsen gezogenen Parallelen M_1P_1 und N_1P_1 der verlangte Punkt. Denn man hat dafür

$$x = 5{,}8,\ y = 7{,}4.$$

Fig. 9.



2) Einen Punkt zu bestimmen, dessen Abscisse $= -8{,}5$ und dessen Ordinate $= 6{,}2$ ist.

Auflösung.

Mache nach dem gewählten Maßstabe (Fig. 9) $OM_2 = 8{,}5$ und $ON_2 = 6{,}2$; so ist der Durchschnittspunkt P_2 der durch

M_2 und N_2 zu den Coordinatenachsen parallel gezogenen Geraden der zu bestimmende Punkt.

3) Man soll einen Punkt finden, für welchen die Gleichungen bestehen:

$$x = -4{,}8 \text{ und } y = -8{,}3.$$

Auflösung.

Mache (Fig. 9) $OM_3 = 4{,}8$ und $ON_3 = 8{,}3$, um in dem Durchschnittspunkte P_3 den verlangten Punkt zu erhalten.

4) Einen Punkt zu bestimmen, dessen Abscisse $= 7{,}5$ und dessen Ordinate $= -6{,}1$ ist.

Auflösung.

Mache (Fig. 9) $OM_4 = 7{,}5$, $ON_4 = 6{,}1$, um den verlangten Punkt P_4 zu bekommen.

5) Einen Punkt anzugeben, für welchen $x = o$, $y = -8{,}3$ ist.

Auflösung.

Der Punkt N_3 (Fig. 9) genügt dieser Bedingung, da nach Aufgabe 3 $ON_3 = 8{,}3$ ist.

6) Einen Punkt so zu bestimmen, daß dessen Abscisse $= -4{,}8$, dessen Ordinate aber Null ist.

Auflösung.

Nach Aufgabe 3 ist M_3 (Fig. 9) der zu suchende Punkt.

7) Von einem Achtecke $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ sind die Coordinaten der Eckpunkte der Reihe nach wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, & y_1 &= 0,\\
x_2 &= -5, & y_2 &= -2,\\
x_3 &= -9, & y_3 &= 6,\\
x_4 &= 3, & y_4 &= 10,\\
x_5 &= 14, & y_5 &= -5,\\
x_6 &= 7, & y_6 &= -7,\\
x_7 &= 8, & y_7 &= 1,\\
x_8 &= 5, & y_8 &= 0.
\end{aligned}$$

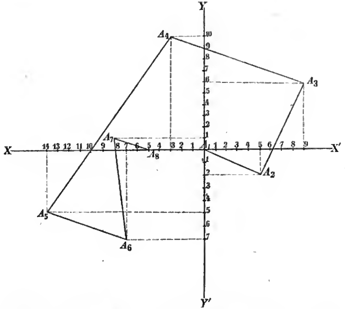
Man soll hiernach das Polygon graphisch darstellen.

Auflösung.

Da für den ersten Eckpunkt A_1 (Fig. 10) die beiden Coordinaten x_1 und y_1 Null sind, so fällt derselbe mit dem Durchschnittspunkte der Coordinatenachsen zusammen. Wie die anderen

Eckpunkte der Reihe nach erhalten werden, ergibt sich, bei

Fig. 10.



richtigem Verständnisse der vorhergehenden Aufgaben, nun unmittelbar aus der Anschauung der beistehenden Figur.

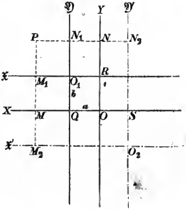
§. 8. Transformation der Coordinaten.

Soll von einem Coordinatensysteme*), das irgend einer Untersuchung zu Grunde gelegt war, aus irgend welchem Grunde in der Weise auf ein anderes, in Bezug auf das erste seiner Lage nach bekanntes Coordinatensystem übergegangen werden, daß die Coordinaten in Hinsicht des alten Systems durch die auf das neue System bezogenen Coordinaten ausgedrückt erscheinen, so nennt man diese Operation die **Transformation der Coordinaten.** Es sind hierbei besonders **drei** Fälle zu unterscheiden, welche wir nun der Reihe nach, vom einfachsten Falle ausgehend, betrachten wollen.

*) Vergl. §. 5. 3.

Erster Fall. Die neuen Achsen seien den ursprünglichen parallel.

Fig. 11.



Es seien (Fig. 11) OX, OY die alten, und $O_1\mathfrak{X} \parallel OX$, $O_1\mathfrak{Y} \parallel OY$ die neuen Achsen, ferner a und b die Coordinaten OQ und O_1Q des neuen Anfangspunktes O_1 in Bezug auf die alten Achsen, x, y die Coordinaten des gegebenen Punktes P in Bezug auf eben diese Achse, dagegen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ dessen Coordinaten hinsichtlich der neuen Achsen.

Man hat alsdann

$$x = OM = OQ + QM = OQ + O_1M_1$$
$$y = PM = M_1M + PM_1 = O_1Q + PM_1$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} x = a + \mathfrak{x} \\ y = b + \mathfrak{y} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

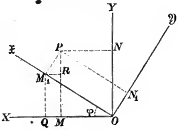
und hiernach unmittelbar

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{x} = x - a \\ \mathfrak{y} = y - b \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Für den Fall, daß die Coordinatenachsen OX und OY bezüglich parallel nach $O_2\mathfrak{X}'$ und $O_2\mathfrak{Y}'$ verlegt werden, hat man die Coordinaten OS und O_2S des neuen Anfangspunktes in Bezug auf das ursprüngliche Coordinatensystem negativ zu setzen u. s. w.

Zweiter Fall. Der Anfangspunkt der Coordinaten bleibe unverändert, die Richtung der Achsen dagegen sei verändert.

Fig. 12.



Bezeichnet man den die Richtung der neuen Achsen bestimmenden Winkel $XO\mathfrak{X}$ (Fig. 12) durch φ, zieht $M_1Q \perp OX$, $M_1R \parallel QO$, so hat man:

$$x = OM = OQ - MQ = OQ - RM_1$$
$$y = PM = RM + PR = M_1Q + PR$$

oder da $\sphericalangle RPM_1 = \sphericalangle XO\mathfrak{X} = \varphi$

also
$$RM_1 = PM_1 \sin\varphi$$
$$PR = PM_1 \cos\varphi$$
$$OQ = OM_1 \cos\varphi$$
$$M_1Q = OM_1 \sin\varphi$$

und nach obiger Bezeichnung
$$OM_1 = \mathfrak{x},\ PM_1 = \mathfrak{y}$$

ist, auch:
$$\left.\begin{aligned} x &= \mathfrak{x}\cos\varphi - \mathfrak{y}\sin\varphi \\ y &= \mathfrak{x}\sin\varphi + \mathfrak{y}\cos\varphi \end{aligned}\right\} \ldots (3).$$

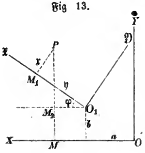
Hieraus erhält man unmittelbar, wenn man einmal die erste Gleichung mit $\cos\varphi$, die zweite mit $\sin\varphi$ multiplicirt und hierauf addirt, das andere Mal die erste mit $\sin\varphi$, die zweite mit $\cos\varphi$ multiplicirt und darnach subtrahirt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ \mathfrak{y} &= y\cos\varphi - x\sin\varphi \end{aligned}\right\} \ldots . (4).$$

Anmerkung. Bei der Anwendung der vorstehenden Formeln hat man insbesondere auf das Richtungszeichen der vorkommenden Winkel zu achten. Man sieht dabei, wie früher, OX als die dem Nullwinkel entsprechende Lage der neuen positiven Achse $O\mathfrak{X}$ an und denkt sich den Winkel φ stets durch Drehung in der Richtung entstanden, welche durch eine Bewegung der positiven Abscissenachse OX gegen die positive Ordinatenachse OY innerhalb des ersten Quadranten angedeutet wird. Die Lage der neuen positiven Ordinatenachse ergibt sich immer leicht, wenn man berücksichtigt, daß dieselbe bei der angegebenen Drehung eine Bewegung in gleichem Sinne macht. Man überzeugt sich leicht, daß obige Formeln für jeden Werth von φ gelten.

Dritter Fall. Der Anfangspunkt und die Richtung der Coordinatenachsen seien verändert.

Fig 13.



Sind (Fig. 13) $OM = x$, $PM = y$ die Coordinaten des Punktes P in Bezug auf die alten Achsen OX, OY, $O_1M_1 = \mathfrak{x}$, $PM_1 = \mathfrak{y}$ die in Bezug auf das neue Achsensystem $O_1\mathfrak{X}$, $O_1\mathfrak{Y}$, und endlich $O_1M_2 = x'$, $PM_2 = y'$ die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf die

durch den neuen Anfangspunkt O_1 zu den alten parallel gezogenen Achsen, so hat man nach dem ersten Falle:

$$x = a + x'; \quad x' = x - a$$
$$y = b + y'; \quad y' = y - b$$

und somit nach dem zweiten Falle:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + \mathfrak{x}\cos\varphi - \mathfrak{y}\sin\varphi \\ y = b + \mathfrak{x}\sin\varphi + \mathfrak{y}\cos\varphi \end{array}\right\} \ldots (5)$$

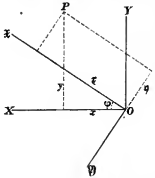
und
$$\mathfrak{x} = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi$$
$$\mathfrak{y} = y'\cos\varphi - x'\sin\varphi$$

oder
$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{x} = (x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi \\ \mathfrak{y} = (y-b)\cos\varphi - (x-a)\sin\varphi \end{array}\right\} \ldots (6).$$

Zusatz.

Für den Fall, daß die Ordinatenachse des neuen Systems eine dem bisherigen Sinne entgegengesetzte Lage haben sollte, wie z. B. in Fig. 14, setze man in den für die zwei letzten Fälle erhaltenen Formeln $\mathfrak{y}$ negativ.

Fig. 14.



Man erhält alsdann:

α) für den zweiten Fall:

$$\left.\begin{array}{l} x = \mathfrak{x}\cos\varphi + \mathfrak{y}\sin\varphi \\ y = \mathfrak{x}\sin\varphi - \mathfrak{y}\cos\varphi \end{array}\right\} \ldots (7)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{x} = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ \mathfrak{y} = x\sin\varphi - y\cos\varphi \end{array}\right\} \ldots (8)$$

β) für den dritten Fall:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + \mathfrak{x}\cos\varphi + \mathfrak{y}\sin\varphi \\ y = b + \mathfrak{x}\sin\varphi - \mathfrak{y}\cos\varphi \end{array}\right\} \ldots (9)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{x} = (x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi \\ \mathfrak{y} = (x-a)\sin\varphi - (y-b)\cos\varphi \end{array}\right\} \ldots (10).$$

§. 9. Beispiele.

1) Die Coordinaten eines Punktes seien $x = -478{,}5$ und $y = +625{,}8$; man soll die Achsen parallel so verlegen, daß die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in Bezug auf das alte System $a = 65{,}4$ und $b = -80{,}4$ werden und die

Coordinaten jenes Punktes in Bezug auf diese Coordinatenachsen berechnen.

Auflösung.

Führt man in die Gleichungen (2) des §. 8 die gegebenen Werthe ein, so folgt:

$$\mathfrak{x} = -478{,}5 - 65{,}4 = -543{,}9$$
$$\mathfrak{y} = 625{,}8 + 80{,}4 = +706{,}2.$$

2) Die Coordinaten eines Punktes seien $x = 312{,}7$, $y = -416{,}8$; der Anfang der Achsen bleibe unverändert, die positive Abscissenachse eines neuen Systems bilde aber mit der des alten einen Winkel von 210°. Welches sind die Coordinaten jenes Punktes in Bezug auf diese neuen Achsen?

Auflösung.

Setzt man in den Gleichungen (4) des §. 8 $x = 312{,}7$; $y = -416{,}8$; $\varphi = 210°$, so folgt:

$$\mathfrak{x} = 312{,}7 \cos 210° - 416{,}8 \sin 210°$$
$$\mathfrak{y} = -416{,}8 \cos 210° - 312{,}7 \sin 210°$$

oder
$$\mathfrak{x} = -312{,}7 \cos 30° + 416{,}8 \sin 30°$$
$$\mathfrak{y} = 416{,}8 \cos 30° + 312{,}7 \sin 30°$$

und hieraus
$$\mathfrak{x} = -270{,}8 + 208{,}4 = -62{,}4$$
$$\mathfrak{y} = 360{,}95 + 156{,}35 = +517{,}3.$$

3) Welche Werthe nehmen in vorhergehender Aufgabe die neuen Coordinaten an, wenn die neue Ordinatenachse in einem dem vorigen entgegengesetzten Sinne zu liegen kommen soll?

Auflösung.

Nach §. 8 Gl. (8) folgt:

$$\mathfrak{x} = 312{,}7 \cos 210° - 416{,}8 \sin 210°$$
$$\mathfrak{y} = 312{,}7 \sin 210° + 416{,}8 \cos 210°$$

oder
$$\mathfrak{x} = -312{,}7 \cos 30° + 416{,}8 \sin 30°$$
$$\mathfrak{y} = -312{,}7 \sin 30° - 416{,}8 \cos 30°$$

oder
$$\mathfrak{x} = -270{,}8 + 208{,}4 = -62{,}4$$
$$\mathfrak{y} = -156{,}35 - 360{,}95 = -517{,}3.$$

4) Die Coordinaten eines Punktes seien $x = -1417$, $y = -2045$. Die Achsen werden so verlegt, daß die neue Abscissenachse mit der ursprünglichen Lage einen Winkel von 130° bildet und die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in Bezug auf die früheren Achsen $a = 216$, $b = -304$ sind

Man soll die Coordinaten jenes Punktes in Bezug auf die neuen Coordinatenachsen berechnen.

Auflösung.

Setzt man in den Gleichungen (6) des §. 8 $x = -1417$, $y = -2045$, $\varphi = 130^\circ$, $a = 216$, $b = -304$, so folgt für die neuen Coordinaten:

$$\mathfrak{x} = (-1417-216)\cos 130^\circ + (-2045+304)\sin 130^\circ$$
$$\mathfrak{y} = (-2045+304)\cos 130^\circ - (-1417-216)\sin 130^\circ$$

oder
$$\mathfrak{x} = 1633\cos 50^\circ - 1741\sin 50^\circ$$
$$\mathfrak{y} = 1741\cos 50^\circ + 1633\sin 50^\circ$$

oder
$$\mathfrak{x} = 1049{,}67 - 1333{,}68 = -284{,}01$$
$$\mathfrak{y} = 1119{,}09 + 1250{,}95 = +2370{,}04.$$

5) Welche Werthe nehmen in der vorhergehenden Aufgabe die neuen Coordinaten an, wenn die neue Ordinatenachse eine der im vorigen Falle entgegengesetzte Lage haben soll?

Auflösung.

Nach §. 8 Gl. (10) folgt:

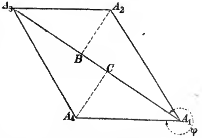
$$\mathfrak{x} = (-1417-216)\cos 130^\circ + (-2045+304)\sin 130^\circ$$
$$\mathfrak{y} = (-1417-216)\sin 130^\circ - (-2045+304)\cos 130^\circ$$

oder
$$\mathfrak{x} = 1633\cos 50^\circ - 1741\sin 50^\circ$$
$$\mathfrak{y} = -1633\sin 50^\circ - 1741\cos 50^\circ$$

oder
$$\mathfrak{x} = 1049{,}67 - 1333{,}68 = -284{,}01$$
$$\mathfrak{y} = -1250{,}95 - 1119{,}09 = -2370{,}04.$$

6) Das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ (Fig. 15) wurde in der Weise aufgenommen, daß man in Bezug auf die Diagonale A_1A_3 als Abscissenachse und A_1 als Anfangspunkt die Coordinaten der Eckpunkte A_2, A_3 und A_4 bestimmt hat. Man soll nun die Coordinaten dieser Eckpunkte in Bezug auf die Seite A_1A_4 als Abscissenachse und denselben Anfangspunkt A_1 bestimmen, wenn gemessen wurde:

Fig. 15.



$A_1B = x_2 = 20{,}5$; $A_2B = y_2 = 10{,}7$; $A_1A_3 = x_3 = 36{,}5$; $A_1C = x_4 = 17{,}67$; $A_4C = y_4 = -10{,}2$.

Auflösung.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke A_1A_4C folgt:

$$A_1A_4 = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = \sqrt{17{,}67^2 + 10{,}2^2} = 20{,}4.$$

Nun ist der Drehungswinkel

$$\varphi = 4R - \measuredangle CA_1A_4,$$

folglich $\quad \sin\varphi = \frac{A_4C}{A_1A_4} = -\frac{10{,}2}{20{,}4} = -\frac{1}{2}$

und $\quad \cos\varphi = \frac{A_1C}{A_1A_4} = \frac{17{,}67}{20{,}4} = \frac{5{,}89}{6{,}8}$

und man erhält somit nach §. 8 Gl. (4)

1) für die neuen Coordinaten des Punktes A_2:

$$\mathfrak{x}_2 = \frac{20{,}5 \,.\, 5{,}89}{6{,}8} - \frac{10{,}7}{2} = 12{,}406$$

$$\mathfrak{y}_2 = \frac{10{,}7 \,.\, 5{,}89}{6{,}8} + \frac{20{,}5}{2} = 19{,}518;$$

2) für die neuen Coordinaten des Punktes A_3:

$$\mathfrak{x}_3 = \frac{36{,}5 \,.\, 5{,}89}{6{,}8} = 31{,}61$$

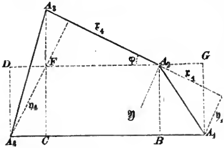
$$\mathfrak{y}_3 = -36{,}5 \,.\, -\frac{1}{2} = \frac{36{,}5}{2} = 18{,}25;$$

3) für die neuen Coordinaten des Punktes A_4:

$$\mathfrak{x}_4 = A_1A_4 = 20{,}4; \quad \mathfrak{y}_4 = 0.$$

7) Bei der Aufnahme eines Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ (Fig. 16) hat man A_1A_4 und A_1G als positive Coordinatenachsen, also A_1 als Anfangspunkt gewählt; man soll nun die Coordinaten der Eckpunkte bestimmen, wenn die Achsen bezüglich nach A_2A_3 und $A_2\mathfrak{Y}$ verlegt werden.

Fig. 16.



Gemessen wurde:

$A_1B = x_2 = 6{,}7$; $A_2B = y_2 = 13{,}8$; $A_1A_4 = 30{,}2$;
$A_1C = x_3 = 25{,}5$; $A_3C = y_3 = 21{,}2$.

Auflösung.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke A_2A_3F folgt:

$$A_2A_3 = \sqrt{(A_1C - A_1B)^2 + (A_3C - A_2B)^2}$$
$$= \sqrt{18{,}8^2 + 7{,}4^2} = 20{,}2.$$

Zur Bestimmung des Drehungswinkels $A_3A_2D = \varphi$ hat man:

$$\sin\varphi = \frac{A_3F}{A_2A_3} = \frac{A_3C - A_2B}{A_2A_3} = \frac{7{,}4}{20{,}2}$$
$$\cos\varphi = \frac{A_2F}{A_2A_3} = \frac{A_1C - A_1B}{A_2A_3} = \frac{18{,}8}{20{,}2}.$$

Setzt man nun in §. 8 Gl. (10):

$$a = A_1B = 6{,}7;\ b = A_2B = 13{,}8,$$

so erhält man

1) für die neuen Coordinaten des Punktes A_1:

$$\mathfrak{x}_1 = (0 - 6{,}7)\cos\varphi + (0 - 13{,}8)\sin\varphi$$
$$\mathfrak{y}_1 = (0 - 6{,}7)\sin\varphi - (0 - 13{,}8)\cos\varphi$$

oder

$$\mathfrak{x}_1 = -\frac{6{,}7\,.\,18{,}8}{20{,}2} - \frac{13{,}8\,.\,7{,}4}{20{,}2} = -11{,}29$$
$$\mathfrak{y}_1 = -\frac{6{,}7\,.\,7{,}4}{20{,}2} + \frac{13{,}8\,.\,18{,}8}{20{,}2} = +10{,}38;$$

2) für die neuen Coordinaten des Punktes A_4:

$$\mathfrak{x}_4 = (30{,}2 - 6{,}7)\cos\varphi + (0 - 13{,}8)\sin\varphi$$
$$\mathfrak{y}_4 = (30{,}2 - 6{,}7)\sin\varphi - (0 - 13{,}8)\cos\varphi$$

oder

$$\mathfrak{x}_4 = \frac{23{,}5\,.\,18{,}8}{20{,}2} - \frac{13{,}8\,.\,7{,}4}{20{,}2} = 16{,}83$$
$$\mathfrak{y}_4 = \frac{23{,}5\,.\,7{,}4}{20{,}2} + \frac{13{,}8\,.\,18{,}8}{20{,}2} = 21{,}45;$$

3) für die neuen Coordinaten des Punktes A_3:

$$\mathfrak{x}_3 = (25{,}5 - 6{,}7)\cos\varphi + (21{,}2 - 13{,}8)\sin\varphi$$
$$\mathfrak{y}_3 = (25{,}5 - 6{,}7)\sin\varphi - (21{,}2 - 13{,}8)\cos\varphi$$

oder

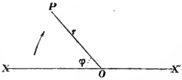
$$\mathfrak{x}_3 = \frac{18{,}8\,.\,18{,}8}{20{,}2} + \frac{7{,}4\,.\,7{,}4}{20{,}2} = \frac{18{,}8^2 + 7{,}4^2}{20{,}2} = \frac{20{,}2^2}{20{,}2} = 20{,}2$$
$$\mathfrak{y}_3 = \frac{18{,}8\,.\,7{,}4}{20{,}2} - \frac{7{,}4\,.\,18{,}8}{20{,}2} = 0.$$

§. 10. Polarcoordinatensystem.

1) Außer der im §. 5 angeführten Methode behufs der Bestimmung der Lage eines Punktes findet noch eine andere

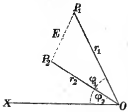
Anwendung. Ist nämlich (Fig. 17) XX′ irgend eine feste Gerade, O ein bestimmter Punkt derselben, so kennt man offenbar unzweideutig die Lage irgend eines Punktes P, wenn die Entfernung OP = r und der Winkel POX = φ gegeben sind. Die Strecke OP = r heißt der Radius vector oder Fahrstrahl, der feste Punkt O der Pol, die feste Gerade die Polare, der Winkel POX = φ der Polarwinkel. Fahrstrahl und Polarwinkel führen den gemeinschaftlichen Namen Polarcoordinaten, weshalb diese Bestimmungsart auch die Methode der Polarcoordinaten genannt wird.

Fig. 17.



2) Der Polarwinkel wird stets von OX als der dem Nullwinkel entsprechenden Lage aus bis 4R in dem durch den Pfeil angedeuteten Drehungssinne gemessen, und um allgemein einen Punkt zu bezeichnen, dessen Polarcoordinaten r und φ sind, setzt man kurzweg: Punkt (r, φ).

Fig. 18.

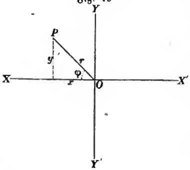


3) Sind (Fig. 18) zwei Punkte (r_1, φ_1) und (r_2, φ_2) gegeben, so ist deren Entfernung

$$E = \pm\sqrt{r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

wo wegen des Doppelzeichens vor dem Wurzelzeichen die in §. 7 gemachte Bemerkung gilt.

Fig. 19



4) Ist ein Punkt P (Fig. 19) durch seine Polarcoordinaten r und φ bestimmt, so lassen sich daraus leicht dessen rechtwinklige Coordinaten in Bezug auf den Pol als Anfangspunkt und die Polare als Abscissenachse herleiten. Denn man erhält sofort

$$x = r\cos\varphi$$

und $$y = r\sin\varphi$$

wie auch der Polarwinkel φ

beschaffen sein mag. Dessen Größe bedingt nämlich zugleich die Richtungszeichen der Coordinaten, wie solches aus den Elementen der ebenen Trigonometrie bekannt ist.

5) Umgekehrt erhält man die einem Punkte entsprechenden Polarcoordinaten aus dessen rechtwinkligen Coordinaten durch die Relationen

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Dritter Abschnitt.

Berechnung der Azimuthe.

§. 11. Azimuth einer Strecke.

Es seien A_1 und A_2 (Fig. 20) zwei aufeinanderfolgende Eckpunkte eines Polygons, x_1, y_1 und x_2, y_2 bezüglich deren Coordinaten in Bezug auf die Coordinatenachsen OX, OY und den Anfangspunkt O derselben. Zieht man nun durch den Anfangspunkt A_1 der Strecke A_1A_2 eine Parallele A_1B zur positiven Richtung OX der Abscissenachse und denkt sich dieselbe in dem in §. 1.8 angegebenen, also in nebenstehender Figur durch den Pfeil angedeuteten Sinne, so lange um A_1 gedreht, bis sie mit der Strecke A_1A_2 zusammenfällt, so bestimmt die Größe dieser Drehung einen Winkel α_1, welchen man die Abweichung oder das Azimuth der Strecke A_1A_2 nennt.

Fig. 20.

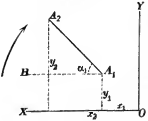
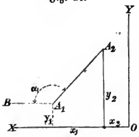


Fig. 21.



Es ist klar, daß je nach der Lage und der angenommenen Aufeinanderfolge der Endpunkte einer Strecke, das Azimuth sich ändert und jeden Werth innerhalb der Grenzen 0° bis 4R annehmen kann. Außer dem eben

erwähnten Falle (Fig. 20) sind offenbar noch die in den Figuren 21 bis 23 dargestellten Fälle möglich.

Fig. 22.

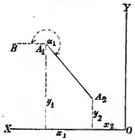
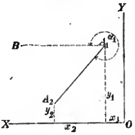


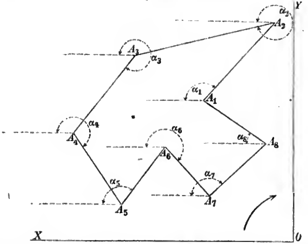
Fig. 23.



§. 12. Azimuthe der Seiten eines Polygons.

Nach dem in §. 11 Vorgetragenen ist es nun leicht, die Azimuthe sämmtlicher Seiten irgend eines Polygons zu bestimmen. Bezeichnen wir zu diesem Ende durch A_1, A_2, A_3, .. A_8 (Fig. 24) die aufeinander folgenden Eckpunkte*) des Achtecks

Fig. 24.



$A_1 A_2 A_3 \ldots A_8$, und bilden nun die Azimuthe der aufeinanderfolgenden Seiten genau nach obiger Vorschrift, so erhalten wir:

*) Vergl. §. 1. 8.

α_1 als Azimuth der Seite $A_1 A_2$
α_2 " " " " $A_2 A_3$
α_3 " " " " $A_3 A_4$
. . . .
α_8 " " " " $A_8 A_1$.

Anmerkung. In Bezug auf die Annahme der Coordinatenachsen, Nummerirung der Eckpunkte u. s. w. bei der stückweisen Vermessung sämmtlicher Liegenschaften des Großherzogthums Baden sagt die betreffende Anweisung im §. 4:

„Zum Zwecke der Triangulirung ist das Land durch den Meridian der Sternwarte zu Mannheim und den durch die Sternwarte auf diesen Meridian gezogenen Perpendikel in vier Haupttheile zerlegt worden, welche nach der Himmelsgegend den Namen: Südwest, Nordwest, Nordost und Südost führen.

Alle Punkte des Dreiecksnetzes werden mittelst der senkrechten Abstände von diesem Meridian und Perpendikel bestimmt.

Die Azimuthe werden von Süd über West gezählt und darnach richten sich die Zeichen der Abscissen und Ordinaten in den vier Quadranten."

Ferner im §. 41 b:

„Die Nummernfolge geht in der Richtung: Nord, West, Süd, Ost und Nord".

Vergleicht man diese Vorschriften mit unseren Annahmen, so ergibt sich daraus eine vollkommene Uebereinstimmung beider. O ist hiernach der die Mannheimer Sternwarte bezeichnende Punkt, OX die Richtung der positiven Seite des durch die Sternwarte gehenden Meridians, OY die positive Richtung der Ordinatenachse, XOY, X'OY, X'OY', XOY' sind die vier aufeinander folgenden Quadranten und die Nummerirung der Eckpunkte, sowie die Erzeugung der Polygonwinkel und der Azimuthe erfolgt darnach ganz in der von uns angenommenen Weise. Es ist klar, daß man die durch verschiedene Punkte einer zu vermessenden Fläche von nicht zu großer Ausdehnung gehenden Meridiane als unter einander parallel ansehen darf.

§. 13. Berechnung der Azimuthe aus den Polygonwinkeln.

1) Faßt man die Bestimmungsweise der Azimuthe der Seiten eines Polygons näher in's Auge, so überzeugt man sich leicht, daß die Schenkel irgend eines Polygonwinkels in Bezug auf die durch den Scheitel desselben zur Abscissenachse parallel gezogene Gerade überhaupt dreierlei Lagen haben können und sich bei jeder dieser Lagen, hinsichtlich der Aufeinanderfolge der Eckpunkte,

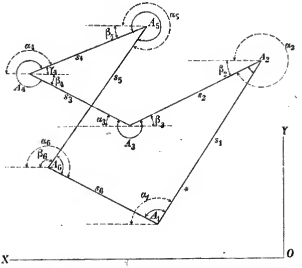
wieder zwei Fälle unterscheiden lassen. Es können nämlich in Bezug auf jene Parallele liegen:

a) beide Schenkel oberhalb, wo alsdann in Betreff der Eckenfolge die zwei durch die Winkel A_1 und A_5 (Fig. 25) dargestellten Fälle möglich sind;

b) beide Schenkel unterhalb, wie z. B. bei den Winkeln A_2 und A_3;

c) der eine Schenkel oberhalb, der andere unterhalb, wie bei den Winkeln A_4 und A_6. Beistehende Fig. 25 umfaßt

Fig. 25.



also sämmtliche Fälle, welche überhaupt möglich sind und wir wollen nun die Azimuthe der sechs Seiten der Reihe nach in den Polygonwinkeln auszudrücken suchen.

2) Bezeichnen wir zu diesem Ende in der Folge durch A_1, A_2, A_3, ... A_6 die den Ecken A_1, A_2, A_3, ... A_6 entsprechenden und an der Figur durch ununterbrochene Bogen angedeuteten Polygonwinkel, durch s_1, s_2, s_3, ... s_6 der Reihe nach die aufeinanderfolgenden Seiten A_1A_2, A_2A_3, ... A_5A_6, A_6A_1, durch α_1, α_2, α_3 ... α_6 die den Seiten s_1, s_2, s_3, ... s_6 entsprechenden Azimuthe, so hat man:

Az. $s_1 = \alpha_1$ . . . . (1)

Az. $s_2 = \alpha_2 = 4R - \beta_2$.

$$
\begin{aligned}
&\text{oder da} && \beta_2 + A_2 + \alpha_1 = 2\Re, \\
&\text{also} && \beta_2 = 2\Re - \alpha_1 - A_2, \\
& && \alpha_2 = 4\Re - (2\Re - \alpha_1 - A_2) \\
& && \quad = \alpha_1 + A_2 - 2\Re + 4\Re \;\ldots\; (2) \\
&\text{Az. } s_3 = \alpha_3 && = A_3 - \beta_3 - 2\Re \\
& && = A_3 - \beta_2 - 2\Re \\
& && = A_3 - (4\Re - \alpha_2) - 2\Re \\
& && = \alpha_2 + A_3 - 2\Re - 4\Re \;\ldots\; (3) \\
&\text{Az. } s_4 = \alpha_4 && = \beta_4 + A_4 - 2\Re \\
& && = \alpha_3 + A_4 - 2\Re \;\ldots\ldots\; (4) \\
&\text{Az. } s_5 = \alpha_5 && = A_5 - \beta_5 \\
& && = A_5 - \gamma_4 \\
& && = A_5 - (2\Re - \alpha_4) \\
& && = \alpha_4 + A_5 - 2\Re \;\ldots\ldots\; (5) \\
&\text{Az. } s_6 = \alpha_6 && = \beta_6 + A_6 \\
& && = \alpha_5 - 2\Re + A_6 \\
& && = \alpha_5 + A_6 - 2\Re \;\ldots\ldots\; (6)
\end{aligned}
$$

Aus der Vergleichung dieser sechs Werthe geht unmittelbar hervor, daß wenn A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, drei aufeinanderfolgende Polygonwinkel, α_{n-1} und α_n die den Seiten $A_{n-1}A_n = s_{n-1}$ und $A_nA_{n+1} = s_n$ entsprechenden Azimuthe bezeichnen, das Azimuth α_n der Seite s_n einen der nachstehenden drei Werthe haben muß:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{n-1} + A_n - 2\Re, \\
&\alpha_{n-1} + A_n - 2\Re + 4\Re, \\
&\alpha_{n-1} + A_n - 2\Re - 4\Re.
\end{aligned}
$$

Bezeichnet somit z_n einen Factor, der je nach der Lage der Seiten s_{n-1}, s_n und s_{n+1} den Werth 0, +1 oder −1 annehmen kann, so läßt sich der Werth des Azimuths allgemein ausdrücken durch die Formel:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + A_n - 2\Re + 4z_n\Re \ldots\ldots (7)$$

3) Nehmen wir nun an, es seien $z_1, z_2, z_3, \ldots z_{n-1}, z_n$ der Reihe nach die Werthe, welche z_n bei der Bestimmung der aufeinanderfolgenden Azimuthe der Seiten irgend eines Polygons annimmt, wo also jeder derselben wieder 0, +1 oder −1 sein wird, und setzen in der Gleichung (7) für n der Reihe nach die Werthe 2, 3, ... (n−1), n, so ergeben sich nachstehende Relationen:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + A_2 - 2\mathfrak{R} + 4z_2\mathfrak{R}$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + A_3 - 2\mathfrak{R} + 4z_3\mathfrak{R}$$
$$\alpha_4 = \alpha_3 + A_4 - 2\mathfrak{R} + 4z_4\mathfrak{R}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} + A_{n-1} - 2\mathfrak{R} + 4z_{n-1}\mathfrak{R}$$
$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + A_n - 2\mathfrak{R} + 4z_n\mathfrak{R}.$$

Addirt man dieselben gliedweise und läßt sogleich die beiderseits erscheinende Summe

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-1}$$

außer Acht, so folgt:

$$\alpha_n = \alpha_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_{n-1} + A_n - 2(n-1)\mathfrak{R} + 4(z_2 + z_3 + z_4 \ldots + z_{n-1} + z_n)\mathfrak{R}$$

oder, wenn man die Summe

$$z_2 + z_3 + z_4 + \ldots + z_{n-1} + z_n = z$$

setzt, wo z nach der Eigenschaft der Summanden z_2, z_3, ... z_n Null, oder eine ganze positive oder negative Zahl sein muß,

$$\alpha_n = \alpha_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} + A_n - 2(n-1)\mathfrak{R} + 4z\mathfrak{R} \ldots (8)$$

Diese Gleichung (8) zeigt, wie man aus dem ersten Azimuthe und den n ersten Polygonwinkeln das Azimuth der nten Seite s_n leicht berechnen kann. Sobald die Summe

$$\alpha_1 + A_2 + A_3 + \ldots - 2(n-1)\mathfrak{R}$$

negativ ausfällt, hat man so oftmals $4\mathfrak{R}$ hinzuzuzählen, als nothwendig ist, um das Azimuth positiv erscheinen zu lassen.

4) Für den Fall, daß die letzte Seite parallel mit der Abscissenachse ist, oder mit dieser zusammenfällt, geht das Azimuth α_1 der ersten Seite in A_1 über, und man hat unter dieser Voraussetzung für das Azimuth der nten Seite eines Polygons:

$$\alpha_n = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1} + A_n - 2(n-1)\mathfrak{R} + 4z\mathfrak{R} \ldots (9)$$

oder wenn man zur Abkürzung die Summe

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = \Sigma(A_n) \ldots (10)$$

setzt

$$\alpha_n = \Sigma(A_n) - 2(n-1)\mathfrak{R} + 4z\mathfrak{R} \ldots (11).$$

Bezeichnet s_n die letzte Seite eines necks, also α_n deren Azimuth, so ist dieses unter der eben gemachten Voraussetzung entweder $2\mathfrak{R}$, oder Null, je nachdem die Seite s_n mit der positiven Abscissenachse gleiche, oder entgegengesetzte Richtung hat. Man überzeugt sich hiervon leicht durch Zeichnung der betreffenden Fälle.

§. 14. Beispiele.

1) Die Azimuthe der Seiten des Elfecks $A_1 A_2 . \dots A_{11}$ zu berechnen, wenn gegeben ist:

$\alpha_1 = 15^0$	$A_4 = 280^0$	$A_8 = 310^0$
$A_1 = 236^0$	$A_5 = 25^0$	$A_9 = 36^0$
$A_2 = 260^0$	$A_6 = 250^0$	$A_{10} = 100^0$
$A_3 = 30^0$	$A_7 = 40^0$	$A_{11} = 53^0$.

Auflösung.

Nach §. 13. 2 hat man:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 15 \\
\alpha_2 &= \alpha_1 + A_2 - 2R \\
&= 15^0 + 260^0 - 180^0 = 95^0, \\
\alpha_3 &= \alpha_2 + A_3 - 2R + 4R \\
&= 95^0 + 30^0 + 180^0 = 305^0, \\
\alpha_4 &= \alpha_3 + A_4 - 2R - 4R \\
&= 305^0 + 280^0 - 540^0 = 45^0, \\
\alpha_5 &= \alpha_4 + A_5 - 2R + 4R \\
&= 45^0 + 25^0 + 180^0 = 250^0, \\
\alpha_6 &= \alpha_5 + A_6 - 2R \\
&= 250^0 + 250^0 - 180^0 = 320^0, \\
\alpha_7 &= \alpha_6 + A_7 - 2R \\
&= 320^0 + 40^0 - 180^0 = 180^0, \\
\alpha_8 &= \alpha_7 + A_8 - 2R \\
&= 180^0 + 310^0 - 180^0 = 310^0, \\
\alpha_9 &= \alpha_8 + A_9 - 2R \\
&= 310^0 + 36^0 - 180^0 = 166^0, \\
\alpha_{10} &= \alpha_9 + A_{10} - 2R \\
&= 166^0 + 100^0 - 180^0 = 86^0, \\
\alpha_{11} &= \alpha_{10} + A_{11} - 2R + 4R \\
&= 86^0 + 53^0 + 180^0 = 319^0.
\end{aligned}$$

Bei einiger Aufmerksamkeit schließt man aus vorstehender Berechnung leicht auf folgende abgekürzte Verfahrungsweise:

$$\begin{array}{rll}
\alpha_1 = & 15^0 & \\
+ & 260^0 & = A_2 \\
\hline
& 275^0 & \\
- & 180^0 & \\
\hline
\alpha_2 = & 95^0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rll}
\alpha_2 = & 95^0 & \\
+ & 30^0 & = A_3 \\
\hline
& 125^0 & \\
+ & 180^0 & \\
\hline
\alpha_3 = & 305^0 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rrl}
\alpha_3 & = & 305^0 \\
 & + & \underline{280^0} = A_4 \\
 & & 585^0 \\
 & - & \underline{540^0} \\
\alpha_4 & = & 45^0 \\
 & + & \underline{25^0} = A_5 \\
 & & 70^0 \\
 & + & \underline{180^0} \\
\alpha_5 & = & 250^0 \\
 & + & \underline{250^0} = A_6 \\
 & & 500^0 \\
 & - & \underline{180^0} \\
\alpha_6 & = & 320^0 \\
 & + & \underline{40^0} = A_7 \\
 & & 360^0 \\
 & - & \underline{180^0} \\
\alpha_7 & = & 180^0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrl}
\alpha_7 & = & 180^0 \\
 & + & \underline{310^0} = A_8 \\
 & & 490^0 \\
 & - & \underline{180^0} \\
\alpha_8 & = & 310^0 \\
 & + & \underline{36^0} = A_9 \\
 & & 346^0 \\
 & - & \underline{180^0} \\
\alpha_9 & = & 166^0 \\
 & + & \underline{100^0} = A_{10} \\
 & & 266^0 \\
 & - & \underline{180^0} \\
\alpha_{10} & = & 86^0 \\
 & + & \underline{53^0} = A_{11} \\
 & & 139^0 \\
 & + & \underline{180^0} \\
\alpha_{11} & = & 319^0
\end{array}
$$

2) Von einem Elfecke $A_1A_2A_3 \ldots . A_{11}$ kennt man die Winkel:

$$
\begin{array}{lll}
A_1 = 40^0\,12' & \qquad & A_6 = 170^0\,30' \\
A_2 = 260^0\,18' & & A_7 = 50^0 \\
A_3 = 130^0\,15' & & A_8 = 200^0\,50' \\
A_4 = 70^0\,36' & & A_9 = 70^0\,10' \\
A_5 = 265^0\,40' & & A_{10} = 320^0\,45'
\end{array}
$$

und weiß, daß die Abscissenachse mit der Seite A_1A_{11} parallel geht. Man soll die Azimuthe der einzelnen Seiten bestimmen.

Auflösung.

Da die Summe $\Sigma(A_{10})$ der 10 gegebenen Winkel $1579^0\,16'$ beträgt, also kleiner ist als $2(n-2)\mathfrak{R}$ oder $2(11-2)\mathfrak{R} = 18\mathfrak{R} = 1620^0$, so erhält man nach §. 2. 4 für den fehlenden Winkel

$$A_{11} = 1620^0 - 1579^0\,16' = 40^0\,44'$$

und man hat nun:

$$
\begin{array}{rrl}
\alpha_1 & = & 40^0\,12' = A_1 \\
 & + & \underline{260^0\,18'} = A_2 \\
 & & 300^0\,30' \\
 & - & \underline{180^0} \\
\alpha_2 & = & 120^0\,30'
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrl}
\alpha_2 & = & 120^0\,30' \\
 & + & \underline{130^0\,15'} = A_3 \\
 & & 250^0\,45' \\
 & - & \underline{180^0} \\
\alpha_3 & = & 70^0\,45'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
\alpha_3 & = & 70^0 45' \\
 & + & 70^0 36' = A_4 \\ \hline
 & & 141^0 21' \\
 & + & 180^0 \\ \hline
\alpha_4 & = & 321^0 21' \\
 & + & 265^0 40' = A_5 \\ \hline
 & & 587^0\ 1' \\
 & - & 540^0 \\ \hline
\alpha_5 & = & 47^0\ 1' \\
 & + & 170^0 30' = A_6 \\ \hline
 & & 217^0 31' \\
 & - & 180^0 \\ \hline
\alpha_6 & = & 37^0 31' \\
 & + & 50^0 \quad = A_7 \\ \hline
 & & 87^0 31' \\
 & + & 180^0 \\ \hline
\alpha_7 & = & 267^0 31'
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
\alpha_7 & = & 267^0 31' \\
 & + & 200^0 50' = A_8 \\ \hline
 & & 468^0 21'. \\
 & - & 180^0 \\ \hline
\alpha_8 & = & 288^0 21' \\
 & + & 70^0 10' = A_9 \\ \hline
 & & 358^0 31' \\
 & - & 180^0 \\ \hline
\alpha_9 & = & 178^0 31' \\
 & + & 320^0 45' = A_{10} \\ \hline
 & & 499^0 16' \\
 & - & 180^0 \\ \hline
\alpha_{10} & = & 319^0 16' \\
 & + & 40^0 44' = A_{11} \\ \hline
 & & 360^0 \\
 & - & 180^0 \\ \hline
\alpha_{11} & = & 180^0.
\end{array}
$$

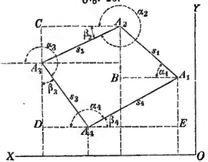
Vierter Abschnitt.

Berechnung der Coordinaten der Eckpunkte eines Polygons.

§. 15. Berechnung der Coordinaten aus den Seiten und Azimuthen.

1) Hinsichtlich der Richtung und der Aufeinanderfolge der Eckpunkte kann eine Seite eines Polygons vier verschiedene Lagen in Bezug auf die Coordinatenachsen annehmen, wie solche der Reihe nach durch die vier Seiten s_1, s_2, s_3, s_4 des Vierecks $A_1A_2A_3A_4$ (Fig. 26) dargestellt sind.

Fig. 26.



Bezeichnen wir nun wieder die Coordinaten der Eckpunkte beziehungsweise durch x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; die entsprechenden Azimuthe, wie früher, durch α_1, α_2, α_3, α_4, und ziehen A_1B, A_2C, A_4D, A_4E parallel zur Abscissenachse, so folgt:

$$y_2 - y_1 = A_2B = s_1 \sin\alpha_1$$
$$x_2 - x_1 = A_1B = s_1 \cos\alpha_1$$
$$y_3 - y_2 = -A_3C = -s_2 \sin\beta_2$$
$$= -s_2 \sin(4\mathfrak{R} - \alpha_2) = s_2 \sin\alpha_2$$
$$x_3 - x_2 = A_2C = s_2 \cos\beta_2$$
$$= s_2 \cos(4\mathfrak{R} - \alpha_2) = s_2 \cos\alpha_2$$

$$y_4 - y_3 = -A_3D = -s_3 \cos\beta_3$$
$$= -s_3 \cos(3\Re - \alpha_3) = s_3 \sin\alpha_3$$
$$x_4 - x_3 = -A_4D = -s_3 \sin\beta_3$$
$$= -s_3 \sin(3\Re - \alpha_3) = s_3 \cos\alpha_3$$
$$y_1 - y_4 = A_1E = s_4 \sin\beta_4$$
$$= s_4 \sin(2\Re - \alpha_4) = s_4 \sin\alpha_4$$
$$x_1 - x_4 = -A_4E = -s_4 \cos\beta_4$$
$$= -s_4 \cos(2\Re - \alpha_4) = s_4 \cos\alpha_4.$$

Wir ersehen hieraus, daß wenn x_n, y_n und x_{n+1}, y_{n+1} die Coordinaten der Endpunkte der $n$ten Seite s_n irgend eines Polygons bezeichnen, ferner α_n das Azimuth dieser Seite ist, man stets zu setzen habe:

$$\left.\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= s_{n-1} \sin\alpha_{n-1} \\ x_n - x_{n-1} &= s_{n-1} \cos\alpha_{n-1} \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + s_{n-1} \sin\alpha_{n-1} \\ x_n &= x_{n-1} + s_{n-1} \cos\alpha_{n-1} \end{aligned}\right\} \ldots (2)$$

2) Setzt man in den Gleichungen (1) der Reihe nach $n = 2, 3, 4, \ldots (n-1), n$, und bezeichnet allgemein die Differenz

$$y_n - y_{n-1} \text{ durch } \Delta y_{n-1}$$
und
$$x_n - x_{n-1} \text{ durch } \Delta x_{n-1}$$

so erhält man für die aufeinanderfolgenden Eckpunkte eines beliebigen Polygons

a) die Ordinatendifferenzen:

$$\left.\begin{aligned} y_2 - y_1 &= \Delta y_1 = s_1 \sin\alpha_1 \\ y_3 - y_2 &= \Delta y_2 = s_2 \sin\alpha_2 \\ y_4 - y_3 &= \Delta y_3 = s_3 \sin\alpha_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} - y_{n-2} &= \Delta y_{n-2} = s_{n-2} \sin\alpha_{n-2} \\ y_n - y_{n-1} &= \Delta y_{n-1} = s_{n-1} \sin\alpha_{n-1} \end{aligned}\right\} \ldots (3)$$

b) die Abscissendifferenzen:

$$\left.\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \Delta x_1 = s_1 \cos\alpha_1 \\ x_3 - x_2 &= \Delta x_2 = s_2 \cos\alpha_2 \\ x_4 - x_3 &= \Delta x_3 = s_3 \cos\alpha_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} - x_{n-2} &= \Delta x_{n-2} = s_{n-2} \cos\alpha_{n-2} \\ x_n - x_{n-1} &= \Delta x_{n-1} = s_{n-1} \cos\alpha_{n-1} \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

3) Summirt man jede dieser zwei Gruppen von Gleichungen, so findet man für die Coordinaten des nten Eckpunktes eines Polygons:

$$\left.\begin{aligned} y_n &= y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots + \Delta y_{n-2} + \Delta y_{n-1} \\ x_n &= x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1} \end{aligned}\right\} \ldots (5)$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} y_n &= y_1 + s_1 \sin\alpha_1 + s_2 \sin\alpha_2 + \ldots + s_{n-1} \sin\alpha_{n-1} \\ x_n &= x_1 + s_1 \cos\alpha_1 + s_2 \cos\alpha_2 + \ldots + s_{n-1} \cos\alpha_{n-1} \end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

4) Setzt man in den Gleichungen (5) wieder der Reihe nach $n = 1, 2, 3, 4, \ldots,$ so erhält man daraus für die aufeinanderfolgenden Eckpunkte

a) die Ordinaten:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_1 && = y_1 \\ y_2 &= y_1 + \Delta y_1 && = y_1 + \Delta y_1 \\ y_3 &= y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 && = y_2 + \Delta y_2 \\ y_4 &= y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 && = y_3 + \Delta y_3 \\ y_5 &= y_1 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \Delta y_4 && = y_4 + \Delta y_4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (7)$$

b) die Abscissen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1 && = x_1 \\ x_2 &= x_1 + \Delta x_1 && = x_1 + \Delta x_1 \\ x_3 &= x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 && = x_2 + \Delta x_2 \\ x_4 &= x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 && = x_3 + \Delta x_3 \\ x_5 &= x_1 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 && = x_4 + \Delta x_4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

Hieraus ersieht man, wie bei der Berechnung der Coordinaten am zweckmäßigsten die folgenden stets aus den nächst vorhergehenden und den betreffenden Differenzen bestimmt werden.

5) Für den Fall, daß das Polygon ein neck, der Eckpunkt A_1 zugleich Anfangspunkt der Coordinaten ist und die positive Richtung der Abscissenachse mit der letzten Seite $A_1A_n = s_n$ zusammenfällt, — was wir nach dem in §. 8 Vorgetragenen jederzeit annehmen dürfen und auch von nun an stets voraussetzen wollen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist —, wird

$$y_1 = 0; \; x_1 = 0; \; y_n = 0; \; x_n = s_n$$

und nach den Gleichungen (5) und (6) erhält man die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots + \Delta y_{n-2} + \Delta y_{n-1} \\ s_n = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_{n-2} + \Delta x_{n-1} \end{array}\right\} \ldots (9)$$

oder auch

$$\left.\begin{array}{l} 0 = s_1 \sin\alpha_1 + s_2 \sin\alpha_2 + \ldots + s_{n-2} \sin\alpha_{n-2} + s_{n-1} \sin\alpha_{n-1} \\ s_n = s_1 \cos\alpha_1 + s_2 \cos\alpha_2 + \ldots + s_{n-2} \cos\alpha_{n-2} + s_{n-1} \cos\alpha_{n-1} \end{array}\right\} \ldots (10)$$

6) Sieht man in einem neck den ersten Eckpunkt als den $(n+1)$ten an, so wird unter der in 3) gemachten Voraussetzung

$$y_{n+1} = 0 \text{ und } x_{n+1} = 0$$

und es bestehen nach der Gl. (10) somit stets die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots + \Delta y_{n-1} + \Delta y_n \\ 0 = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \ldots + \Delta x_{n-1} + \Delta x_n \end{array}\right\} \ldots (11)$$

Wir folgern hieraus für den bezeichneten Fall nachstehenden Satz:

Die algebraische Summe sowohl der n Coordinatendifferenzen als auch der n Abscissendifferenzen eines necks ist Null.

7) Wir wollen nun die gewonnenen Resultate nachstehend durch die vollständige Ausführung eines numerischen Beispiels näher erläutern.

§. 16. Beispiel.

Von einem Elfecke $A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_{11}$ kennt man*)

die Seiten:	die Winkel:
$s_1 = 857'$	$A_1 = 102^0 22' 56{,}8''$
$s_2 = 1098'$	$A_2 = 107^0 38' 30''$
$s_3 = 780'$	$A_3 = 116^0 10' 22''$
$s_4 = 925'$	$A_4 = 245^0 30'$
$s_5 = 943'$	$A_5 = 103^0 10' 40''$
$s_6 = 624'$	$A_6 = 119^0 10' 10''$
$s_7 = 697'$	$A_7 = 84^0$
$s_8 = 845'$	$A_8 = 275^0 31' 28''$
$s_9 = 620'$	$A_9 = 120^0$
$s_{10} = 610'$	$A_{10} = 107^0\ 2' 12''$
$s_{11} = 897{,}14'$	$A_{11} = 239^0 23' 41{,}2''$

*) Aus dem Lehrb. der Polyg. v. Proß.

Man soll die Coordinaten der einzelnen Eckpunkte berechnen, wenn die Seite $A_{11}A_1 = s_{11}$ als Abscissenachse und A_1 als Anfangspunkt angenommen wird, und hiernach das Polygon in verjüngtem Maßstabe auftragen.

Auflösung.

a) Berechnung der Azimuthe.

$\alpha_1 =$	102°22′56,8″	$= A_1$	$\alpha_6 =$	254° 2′38,8″	
+	107°38′30″	$= A_2$	+	84°	$= A_7$
	210° 1′26,8″			338° 2′38,8″	
−	180°		−	180°	
$\alpha_2 =$	30° 1′26,8″		$\alpha_7 =$	158° 2′38,8″	
+	116°10′22″	$= A_3$	+	275°31′28″	$= A_8$
	146°11′48,8″			433°34′ 6,8″	
+	180°		−	180°	
$\alpha_3 =$	326°11′48,8″		$\alpha_8 =$	253°34′ 6,8″	
+	245°30′	$= A_4$	+	120°	$= A_9$
	571°41′48,8″			373°34′ 6,8″	
−	540°		−	180°	
$\alpha_4 =$	31°41′48,8″		$\alpha_9 =$	193°34′ 6,8″	
+	103°10′40″	$= A_5$	+	107° 2′12″	$= A_{10}$
	134°52′28,8″			300°36′18,8″	
+	180°		−	180°	
$\alpha_5 =$	314°52′28,8″		$\alpha_{10} =$	120°36′18,8″	
+	119°10′10″	$= A_6$	+	239°23′41,2″	$= A_{11}$
	434° 2′38,8″			360°	
−	180°		−	180°	
$\alpha_6 =$	254° 2′38,8″		$\alpha_{11} =$	180°	

b) Berechnung der Coordinatendifferenzen.

Ordinatendifferenzen:	Abscissendifferenzen:
$\Delta y_1 = s_1 \sin \alpha_1$	$\Delta x_1 = s_1 \cos \alpha_1$
$\log s_1 = 2{,}9329808$	$\log s_1 = 2{,}9329808$
$\log \sin \alpha_1 = 9{,}9897780$	$\log \cos \alpha_1 = 9{,}3312978$ (−)
2,9227588	2,2642786
$\Delta y_1 = +837{,}064$	$\Delta x_1 = -183{,}772$

Ordinatendifferenzen: / **Abscissendifferenzen:**

$\Delta y_2 = s_2 \sin \alpha_2$

$\log s_2 = 3{,}0406023$
$\log \sin \alpha_2 = \underline{9{,}6992864}$
$2{,}7398887$

$\Delta y_2 = +549{,}400$

$\Delta x_2 = s_2 \cos \alpha_2$

$\log s_2 = 3{,}0406023$
$\log \cos \alpha_2 = \underline{9{,}9374251}$
$2{,}9780274$

$\Delta x_2 = +950{,}665.$

$\Delta y_3 = s_3 \sin \alpha_3$

$\log s_3 = 2{,}8920946$
$\log \sin \alpha_3 = \underline{9{,}7453409}$ (—)
$2{,}6374355$

$\Delta y_3 = -433{,}946.$

$\Delta x_3 = s_3 \cos \alpha_3$

$\log s_3 = 2{,}8920946$
$\log \cos \alpha_3 = \underline{9{,}9195771}$
$2{,}8116717$

$\Delta x_3 = +648{,}144.$

$\Delta y_4 = s_4 \sin \alpha_4$

$\log s_4 = 2{,}9661417$
$\log \sin \alpha_4 = \underline{9{,}7205111}$
$2{,}6866528$

$\Delta y_4 = +486{,}019.$

$\Delta x_4 = s_4 \cos \alpha_4$

$\log s_4 = 2{,}9661417$
$\log \cos \alpha_4 = \underline{9{,}9298478}$
$2{,}8959895$

$\Delta x_4 = +787{,}027.$

$\Delta y_5 = s_5 \sin \alpha_5$

$\log s_5 = 2{,}9745117$
$\log \sin \alpha_5 = \underline{9{,}8504329}$ (—)
$2{,}8249446$

$\Delta y_5 = -668{,}259.$

$\Delta x_5 = s_5 \cos \alpha_5$

$\log s_5 = 2{,}9745117$
$\log \cos \alpha_5 = \underline{9{,}8485329}$
$2{,}8230446$

$\Delta x_5 = +665{,}341.$

$\Delta y_6 = s_6 \sin \alpha_6$

$\log s_6 = 2{,}7951846$
$\log \sin \alpha_6 = \underline{9{,}9829374}$ (—)
$2{,}7781220$

$\Delta y_6 = -599{,}959.$

$\Delta x_6 = s_6 \cos \alpha_6$

$\log s_6 = 2{,}7951846$
$\log \cos \alpha_6 = \underline{9{,}4391703}$ (—)
$2{,}2343549$

$\Delta x_6 = -171{,}536.$

$\Delta y_7 = s_7 \sin \alpha_7$

$\log s_7 = 2{,}8432328$
$\log \sin \alpha_7 = \underline{9{,}5727470}$
$2{,}4159798$

$\Delta y_7 = +260{,}603.$

$\Delta x_7 = s_7 \cos \alpha_7$

$\log s_7 = 2{,}8432328$
$\log \cos \alpha_7 = \underline{9{,}9673008}$ (—)
$2{,}8105336$

$\Delta x_7 = -646{,}448.$

$\Delta y_8 = s_8 \sin \alpha_8$

$\log s_8 = 2{,}9268567$
$\log \sin \alpha_8 = \underline{9{,}9818905}$ (—)
$2{,}9087472$

$\Delta y_8 = -810{,}489.$

$\Delta x_8 = s_8 \cos \alpha_8$

$\log s_8 = 2{,}9268567$
$\log \cos \alpha_8 = \underline{9{,}4515836}$ (—)
$2{,}3784403$

$\Delta x_8 = -239{,}023.$

Ordinatendifferenzen:	Abscissendifferenzen:
$\Delta y_9 = s_9 \sin \alpha_9$	$\Delta x_9 = s_9 \cos \alpha_9$
$\log s_9 = 2{,}7923917$	$\log s_9 = 2{,}7923917$
$\log \sin \alpha_9 = 9{,}3703440$ (−)	$\log \cos \alpha_9 = 9{,}9877064$ (−)
2,1627357	2,7800981
$\Delta y_9 = -145{,}457.$	$\Delta x_9 = -602{,}696.$
$\Delta y_{10} = s_{10} \sin \alpha_{10}$	$\Delta x_{10} = s_{10} \cos \alpha_{10}$
$\log s_{10} = 2{,}7853298$	$\log s_{10} = 2{,}7853298$
$\log \sin \alpha_{10} = 9{,}9348496$	$\log \cos \alpha_{10} = 9{,}7068200$ (−)
2,7201794	2,4921498
$\Delta y_{10} = +525{,}024.$	$\Delta x_{10} = -310{,}563.$
$\Delta y_{11} = s_{11} \sin \alpha_{11} = 0.$	$\Delta x_{11} = s_{11} \cos \alpha_{11} = -897{,}139.$

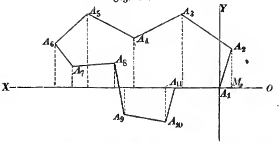
c) **Berechnung der Coordinaten.**

Nach §. 15 (7) und (8) hat man:

Ordinaten:	Abscissen:
$y_1 = 0$	$x_1 = 0$
$837{,}064 = \Delta y_1$	$-183{,}772 = \Delta x_1$
$y_2 = +837{,}064$	$x_2 = -183{,}772$
$549{,}400 = \Delta y_2$	$950{,}665 = \Delta x_2$
$y_3 = +1386{,}464$	$x_3 = +766{,}893$
$-433{,}946 = \Delta y_3$	$648{,}144 = \Delta x_3$
$y_4 = +952{,}518$	$x_4 = +1415{,}037$
$486{,}019 = \Delta y_4$	$787{,}027 = \Delta x_4$
$y_5 = +1438{,}537$	$x_5 = +2202{,}064$
$-668{,}259 = \Delta y_5$	$665{,}341 = \Delta x_5$
$y_6 = +779{,}278$	$x_6 = +2867{,}405$
$-599{,}959 = \Delta y_6$	$-171{,}536 = \Delta x_6$
$y_7 = +170{,}319$	$x_7 = +2695{,}869$
$260{,}603 = \Delta y_7$	$-646{,}448 = \Delta x_7$
$y_8 = +430{,}922$	$x_8 = +2049{,}421$
$-810{,}489 = \Delta y_8$	$-239{,}023 = \Delta x_8$
$y_9 = -379{,}567$	$x_9 = +1810{,}398$
$-145{,}457 = \Delta y_9$	$-602{,}696 = \Delta x_9$
$y_{10} = -525{,}024$	$x_{10} = +1207{,}702$
$525{,}024 = \Delta y_{10}$	$-310{,}563 = \Delta x_{10}$
$y_{11} = 0$	$x_{11} = +897{,}139 = s_{11}.$

Um mittelst der berechneten Coordinaten die Figur graphisch in verjüngtem Maßstabe darzustellen, nehme man irgend eine Gerade OX (Fig. 27) als positive Abscissenachse, A_1 als den Anfangspunkt und $A_1Y \perp A_1X$ als positive Ordinatenachse an, so gibt A_1 zugleich den ersten Eckpunkt. Um den Punkt A_2

Fig. 27.



zu construiren, nehme man nach dem gewählten Maßstabe die absolute Länge der Abscisse $x_2 = 183{,}772'$ in Zirkel, trage solche, da x_2 negativ werden soll, von A_1 nach M_2, errichte in M_2 eine zur Abscissenachse Senkrechte und trage $y_2 = 837{,}064'$ darauf aufwärts nach M_2A_2, so ist der Eckpunkt A_2 gefunden. Analog bestimmt man die übrigen Eckpunkte. Man erhält schließlich ein durch die Fig. 27 dargestelltes Bild für das berechnete Polygon.

§. 17. Berechnung der Coordinaten aus den Seiten und Polygonwinkeln.

1) Nach §. 13. 4. Gl. (11) ist unter der in §. 15. 5. gemachten Voraussetzung:

$$\alpha_n = \Sigma(A_n) - 2(n-1)\mathfrak{R} + 4z\mathfrak{R}$$

also

$$\sin\alpha_n = \sin[\Sigma(A_n) - 2(n-1)\mathfrak{R} + 4z\mathfrak{R}]$$
$$\cos\alpha_n = \cos[\Sigma(A_n) - 2(n-1)\mathfrak{R} + 4z\mathfrak{R}]$$

oder

$$\sin\alpha_n = \sin[\Sigma(A_n) - 2(n-1)\mathfrak{R}]$$
$$\cos\alpha_n = \cos[\Sigma(A_n) - 2(n-1)\mathfrak{R}].$$

Setzt man hierin der Reihe nach

$$n = 1, 2, 3, 4, \ldots (n-1), n$$

so folgt:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha_1 &= \sin A_1\\
\cos\alpha_1 &= \cos A_1\\
\sin\alpha_2 &= \sin[\Sigma(A_2)-2\mathfrak{R}]\\
\cos\alpha_2 &= \cos[\Sigma(A_2)-2\mathfrak{R}]\\
\sin\alpha_3 &= \sin[\Sigma(A_3)-2.2\mathfrak{R}]\\
\cos\alpha_3 &= \cos[\Sigma(A_3)-2.2\mathfrak{R}]\\
\sin\alpha_4 &= \sin[\Sigma(A_4)-2.3\mathfrak{R}]\\
\cos\alpha_4 &= \cos[\Sigma(A_4)-2.3\mathfrak{R}]\\
\sin\alpha_5 &= \sin[\Sigma(A_5)-2.4\mathfrak{R}]\\
\cos\alpha_5 &= \cos[\Sigma(A_5)-2.4\mathfrak{R}]\\
&\dots\dots\dots\\
\sin\alpha_n &= \sin[\Sigma(A_n)-2(n-1)\mathfrak{R}]\\
\cos\alpha_n &= \cos[\Sigma(A_n)-2(n-1)\mathfrak{R}].
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\sin\alpha_n &= \sin[\Sigma(A_n)-2(n-1)\mathfrak{R}]\\
&= -\sin[2(n-1)\mathfrak{R}-\Sigma(A_n)]\\
\cos\alpha_n &= \cos[\Sigma(A_n)-2(n-1)\mathfrak{R}]\\
&= \cos[2(n-1)\mathfrak{R}-\Sigma(A_n)],
\end{aligned}$$

also, wenn n ungerade ist:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha_n &= \sin\Sigma(A_n)\\
\cos\alpha_n &= \cos\Sigma(A_n)
\end{aligned}$$

und wenn n gerade ist:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha_n &= -\sin\Sigma(A_n)\\
\cos\alpha_n &= -\cos\Sigma(A_n).
\end{aligned}$$

Obige Gleichungen gehen hierdurch über in

$$\begin{aligned}
\sin\alpha_1 &= \sin A_1\\
\cos\alpha_1 &= \cos A_1\\
\sin\alpha_2 &= -\sin\Sigma(A_2)\\
\cos\alpha_2 &= -\cos\Sigma(A_2)\\
\sin\alpha_3 &= \sin\Sigma(A_3)\\
\cos\alpha_3 &= \cos\Sigma(A_3)\\
\sin\alpha_4 &= -\sin\Sigma(A_4)\\
\cos\alpha_4 &= -\cos\Sigma(A_4)\\
\sin\alpha_5 &= \sin\Sigma(A_5)\\
\cos\alpha_5 &= \cos\Sigma(A_5)\\
&\dots\dots\dots\\
\sin\alpha_n &= (-1)^{n-1}\sin\Sigma(A_n)\\
\cos\alpha_n &= (-1)^{n-1}\cos\Sigma(A_n)
\end{aligned}$$

2) Nach §. 15 (3) und (4) erhält man somit der Reihe nach

a) die Ordinatendifferenzen:

$$y_2 = \varDelta y_1 = s_1 \sin A_1$$
$$y_3 - y_2 = \varDelta y_2 = -s_2 \sin \Sigma(A_2) = -s_2 \sin(A_1 + A_2)$$
$$y_4 - y_3 = \varDelta y_3 = s_3 \sin \Sigma(A_3) = s_3 \sin(A_1 + A_2 + A_3)$$
$$y_5 - y_4 = \varDelta y_4 = -s_4 \sin \Sigma(A_4) = -s_4 \sin(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

. . . .

$$y_n - y_{n-1} = \varDelta y_{n-1} = (-1)^n s_{n-1} \sin \Sigma(A_{n-1}) = (-1)^n s_{n-1} \sin (A_1 + A_2 \ldots + A_{n-1}),$$

b) die Abscissendifferenzen:

$$x_2 = \varDelta x_1 = s_1 \cos A_1$$
$$x_3 - x_2 = \varDelta x_2 = -s_2 \cos \Sigma(A_2) = -s_2 \cos(A_1 + A_2)$$
$$x_4 - x_3 = \varDelta x_3 = s_3 \cos \Sigma(A_3) = s_3 \cos(A_1 + A_2 + A_3)$$
$$x_5 - x_4 = \varDelta x_4 = -s_4 \cos \Sigma(A_4) = -s_4 \cos(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)$$

. . . .

$$x_n - x_{n-1} = \varDelta x_{n-1} = (-1)^n s_{n-1} \cos \Sigma(A_{n-1}) = (-1)^n s_{n-1} \cos (A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1})$$

und nach §. 15 (6) für die directe Bestimmung der Coordinaten des $n$ten Eckpunktes aus den Seiten und Winkeln:

$$y_n = s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2) + s_3 \sin \Sigma(A_3) - s_4 \sin \Sigma(A_4) + \ldots + (-1)^n s_{n-1} \sin \Sigma(A_{n-1})$$
$$x_n = s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2) + s_3 \cos \Sigma(A_3) - s_4 \cos \Sigma(A_4) + \ldots + (-1)^n s_{n-1} \cos \Sigma(A_{n-1}).$$

3) Sind sämmtliche Coordinaten eines Polygons zu berechnen, so bestimmt man auch hier wieder am vortheilhaftesten zuerst die aufeinanderfolgenden Coordinatendifferenzen nach obigen Gleichungen und mittelst derselben nach §. 15 (7) und (8) der Reihe nach die Coordinaten der einzelnen Eckpunkte.

Man findet dafür

a) die Ordinaten:

$$y_2 = \varDelta y_1 = s_1 \sin A_1$$
$$y_3 = y_2 + \varDelta y_2 = s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2)$$
$$y_4 = y_3 + \varDelta y_3 = s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2) + s_3 \sin \Sigma(A_3)$$
$$y_5 = y_4 + \varDelta y_4 = s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2) + s_3 \sin \Sigma(A_3) - s_4 \sin \Sigma(A_4)$$

. . . .

b) die Abscissen:

$$x_2 = \varDelta x_1 = s_1 \cos A_1$$
$$x_3 = x_2 + \varDelta x_2 = s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2)$$
$$x_4 = x_3 + \varDelta x_3 = s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2) + s_3 \cos \Sigma(A_3)$$
$$x_5 = x_4 + \varDelta x_4 = s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2) + s_3 \cos \Sigma(A_3) - s_4 \cos \Sigma(A_4)$$

. . . .

4) Hat die Abscissenachse mit der letzten Seite nicht einerlei Richtung, so hat man in vorstehenden Formeln durchweg das Azimuth der Seite s_1 statt des Winkels A_1 einzuführen.

5) Wir wollen nun sogleich die gewonnenen Resultate auf ein numerisches Beispiel anwenden.

§. 18. Beispiel.

Die Coordinaten des in §. 16 gegebenen Elfecks aus den Seiten und Polygonwinkeln zu berechnen.

Auflösung.

a) Berechnung der Winkelsummen.

Winkelsumme.	Quadrant.	Reducirte Winkel.
$A_1 = 102^0\ 22'\ 56{,}8''$	II	$77^0\ 37'\ 3{,}2''$
$\Sigma(A_2) = 210^0\ 1'\ 26{,}8''$	III	$30^0\ 1'\ 26{,}8''$
$\Sigma(A_3) = 326^0\ 11'\ 48{,}8''$	IV	$33^0\ 48'\ 11{,}2''$
$\Sigma(A_4) = 571^0\ 41'\ 48{,}8''$	III	$31^0\ 41'\ 48{,}8''$
$\Sigma(A_5) = 674^0\ 52'\ 28{,}8''$	IV	$45^0\ 7'\ 31{,}2''$
$\Sigma(A_6) = 794^0\ 2'\ 38{,}8''$	I	$74^0\ 2'\ 38{,}8''$
$\Sigma(A_7) = 878^0\ 2'\ 38{,}8''$	II	$21^0\ 57'\ 21{,}2''$
$\Sigma(A_8) = 1153^0\ 34'\ 6{,}8''$	I	$73^0\ 34'\ 6{,}8''$
$\Sigma(A_9) = 1273^0\ 34'\ 6{,}8''$	III	$13^0\ 34'\ 6{,}8''$
$\Sigma(A_{10}) = 1380^0\ 36'\ 18{,}8''$	IV	$59^0\ 23'\ 41{,}2''$
$\Sigma(A_{11}) = 1620^0$		0

Berechnung der Coordinatendifferenzen.*)

Ordinatendifferenzen:

$$\varDelta y_1 = s_1 \sin A_1 = +837{,}064$$
$$\varDelta y_2 = -s_2 \sin \Sigma(A_2) = +549{,}400$$

*) Die logarithmische Ausrechnung ist hier weggelassen, da sie in Betreff der absoluten Zahlenwerthe genau mit der zu §. 16 gegebenen übereinstimmt.

$$\Delta y_3 = s_3 \sin \Sigma(A_3) = -433,946$$
$$\Delta y_4 = -s_4 \sin \Sigma(A_4) = +486,019$$
$$\Delta y_5 = s_5 \sin \Sigma(A_5) = -668,259$$
$$\Delta y_6 = -s_6 \sin \Sigma(A_6) = -599,959$$
$$\Delta y_7 = s_7 \sin \Sigma(A_7) = +260,603$$
$$\Delta y_8 = -s_8 \sin \Sigma(A_8) = -810,489$$
$$\Delta y_9 = s_9 \sin \Sigma(A_9) = -145,457$$
$$\Delta y_{10} = -s_{10} \sin \Sigma(A_{10}) = +525,024$$
$$\Delta y_{11} = s_{11} \sin \Sigma(A_{11}) = 0.$$

Abscissendifferenzen:

$$\Delta x_1 = s_1 \cos A_1 = -183,772$$
$$\Delta x_2 = -s_2 \cos \Sigma(A_2) = +950,665$$
$$\Delta x_3 = s_3 \cos \Sigma(A_3) = +648,144$$
$$\Delta x_4 = -s_4 \cos \Sigma(A_4) = +787,027$$
$$\Delta x_5 = s_5 \cos \Sigma(A_5) = +665,341$$
$$\Delta x_6 = -s_6 \cos \Sigma(A_6) = -171,536$$
$$\Delta x_7 = s_7 \cos \Sigma(A_7) = -646,448$$
$$\Delta x_8 = -s_8 \cos \Sigma(A_8) = -239,023$$
$$\Delta x_9 = s_9 \cos \Sigma(A_9) = -602,696$$
$$\Delta x_{10} = -s_{10} \cos \Sigma(A_{10}) = -310,563$$
$$\Delta x_{11} = s_{11} \cos \Sigma(A_{11}) = -897,139.$$

c) Berechnung der Coordinaten.

Die vorstehenden Coordinatendifferenzen stimmen mit den früher für dieselbe Aufgabe in §. 16 gefundenen genau überein, also erhält man die Coordinaten wie dort.

§. 19. Aufgabe.

Die Coordinaten zweier Punkte A_m und A_{m+1} seien x_m, y_m und x_{m+1}, y_{m+1}; man soll die Entfernung s_m beider Punkte und das Azimuth α_m bestimmen.

Auflösung.

Setzt man in den Gleichungen (1) des §. 15 $n-1 = m$, also $n = m+1$, so gehen dieselben über in:

$$s_m \sin \alpha_m = y_{m+1} - y_m$$
$$s_m \cos \alpha_m = x_{m+1} - x_m,$$

oder wenn man beide Gleichungen quadrirt und addirt:

$$s_m^2(\sin^2\alpha_m + \cos^2\alpha_m) = (y_{m+1} - y_m)^2 + (x_{m+1} - x_m)^2,$$

oder, da

$$\sin^2\alpha_m + \cos^2\alpha_m = 1$$

ist;

$$s_m^2 = (y_{m+1} - y_m)^2 + (x_{m+1} - x_m)^2;$$

folglich wird

$$s_m = \pm\sqrt{(y_{m+1} - y_m)^2 + (x_{m+1} - x_m)^2} \ldots (1)$$

Anmerkung. Das Doppelzeichen $\pm$ deutet an, daß wenn die Richtung von A_m gegen A_{m+1} als die positive angesehen wird, man die von A_{m+1} gegen A_m als negativ in Betracht zu ziehen habe.

Durch Division erhält man aus obigen Gleichungen behufs der Bestimmung des Azimuths α_m unmittelbar:

$$\operatorname{tg}\alpha_m = \frac{y_{m+1} - y_m}{x_{m+1} - x_m} = \frac{\Delta y_m}{\Delta x_m} \ldots (2)$$

woraus α_m gefunden werden kann. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, daß der Winkel α_m liegt:

a) im ersten Quadranten, wenn Δy_m und Δx_m positiv sind,
b) im zweiten Quadranten, wenn Δy_m positiv, aber Δx_m negativ ist,
c) im dritten Quadranten, wenn Δy_m und Δx_m negativ sind,
d) im vierten Quadranten, wenn Δy_m negativ, aber Δx_m positiv ist.

Fünfter Abschnitt.

Inhaltsberechnung eines Polygons.

---

§. 20. Berechnung des Inhaltes aus den Coordinaten der Eckpunkte.

1) Nach §. 5 kann der Inhalt eines jeden Polygons als die algebraische Summe der Inhalte sämmtlicher Dreiecke angesehen werden, welche entstehen, wenn man von irgend einer Ecke desselben aus nach allen übrigen Eckpunkten Diagonalen zieht. Wir gehen darum von der Bestimmung des Inhaltes eines Dreiecks aus und schließen hiernach auf den eines $n$ecks überhaupt.

2) Ist $A_1A_2A_3$ irgend ein Dreieck, bei welchem die Eckpunkte in der seither üblichen Weise aufeinander folgen, bezeichnen α_1 und α_2 die den Seiten $A_1A_2 = s_1$ und $A_2A_3 = s_2$ entsprechenden Azimuthe, so ist nach §. 13

$$\alpha_2 = \alpha_1 + A_2 + 2\mathfrak{R}$$

also

$$A_2 = \alpha_2 - \alpha_1 - 2\mathfrak{R}$$

somit

$$\sin A_2 = \sin(\alpha_2 - \alpha_1 - 2\mathfrak{R}) = -\sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

oder

$$\sin A_2 = \sin(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Bezeichnet nun J den Inhalt des $\triangle A_1A_2A_3$, so hat man nach E. T. §. 34

$$2J = s_1 s_2 \sin A_2 = s_1 s_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$= s_1 s_2 (\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2)$$
$$= s_1 \sin\alpha_1 . s_2 \cos\alpha_2 - s_1 \cos\alpha_1 . s_2 \sin\alpha_2,$$

oder da nach §. 15 (3)

$$s_1 \sin\alpha_1 = y_2 - y_1 \qquad s_1 \cos\alpha_1 = x_2 - x_1$$
$$s_2 \sin\alpha_2 = y_3 - y_2 \qquad s_2 \cos\alpha_2 = x_3 - x_2$$

auch

$$2J = (y_2 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1)$$
$$= y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_1 - (y_2 x_1 + y_3 x_2 + y_1 x_3) \ldots (1).$$

Behufs praktischer Rechnung gibt man diesem Ausdrucke für den doppelten Inhalt eines Dreiecks besser eine der Formen:

$$2J = y_1 (x_2 - x_3) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_1 - x_2) \ldots (2)$$

oder

$$2J = x_1 (y_3 - y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_3 (y_2 - y_1) \ldots (3).$$

Anmerkung. Um eine Controle für die ausgeführte Rechnung zu haben, bestimmt man gewöhnlich den Inhalt nach diesen beiden Formeln zugleich.

Für den Fall, daß die Aufeinanderfolge der Eckpunkte in entgegengesetztem Sinne genommen wird, hat man y_3 und x_3 an die Stelle von y_2 und x_2 und umgekehrt zu setzen. Man erhält alsdann nach obiger Formel:

$$2J = (y_3 - y_1)(x_2 - x_3) - (y_2 - y_3)(x_3 - x_1)$$
$$= -[y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_1 - (y_2 x_1 + y_3 x_2 + y_1 x_3)]$$

d. i. den entgegengesetzten Werth von (1).

3) Denkt man sich nun ein neck $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ vom Eckpunkte A_1 aus durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt und berücksichtigt, daß dabei alle Dreiecke, deren Eckpunkte in einer unserer Annahme entgegengesetzten Ordnung aufeinanderfolgen, nach §. 3 negativ zu nehmen, somit nach der eben in 2. gemachten Bemerkung wiederum als positiv anzusetzen sind, so erhält man nach den Formeln (1) bis (3) ganz allgemein für ein neck den doppelten Inhalt

$$2J = y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_4 + \ldots + y_{n-1} x_n + y_n x_1 -$$
$$(y_2 x_1 + y_3 x_2 + y_4 x_3 + \ldots + y_n x_{n-1} + y_1 x_n) \ldots (4)$$

oder

$$2J = y_1(x_2 - x_n) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_4 - x_2) + \dots + y_{n-1}(x_n - x_{n-2}) + y_n(x_1 - x_{n-1}) \dots . (5)$$

oder

$$2J = x_1(y_n - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + \dots + x_{n-1}(y_{n-2} - y_n) + x_n(y_{n-1} - y_1) \dots . (6).$$

Anmerkung. Für die beiden letzten Gleichungen gilt die zu 1 gemachte Bemerkung.

4) Bezeichnen x_m und y_m die Coordinaten des mten Eckpunktes eines Polygons, so geht aus der näheren Betrachtung der Gleichungen (5) und (6) unmittelbar hervor, daß die Summanden der ersten die allgemeine Form

$$y_m(x_{m+1} - x_{m-1})$$

dagegen die der zweiten die Form

$$x_m(y_{m-1} - y_{m+1})$$

haben.

5) Unter der seither üblichen Voraussetzung, daß

$$x_1 = y_1 = y_n = 0$$

sei, gehen obige Gleichungen (4) bis (6) der Reihe nach über in:

$$2J = y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_5 + \dots . + y_{n-1}x_n - (y_3x_2 + y_4x_3 + y_5x_4 + \dots . + y_{n-1}x_{n-2}) \dots . . (7)$$

$$2J = y_2x_3 + y_3(x_4 - x_2) + y_4(x_5 - x_3) + \dots + y_{n-1}(x_n - x_{n-2}) . . (8)$$

$$2J = -x_2y_3 + x_3(y_2 - y_4) + x_4(y_3 - y_5) + \dots + x_ny_{n-1} \dots (9).$$

6) Wir wollen nun zur Erläuterung der gefundenen Formeln nachstehend ein numerisches Beispiel behandeln.

§. 21. Beispiel.

Den Inhalt des in §. 16 gegebenen Elfecks zu berechnen.

Auflösung.

Benennung des Punktes	Ordinaten		Abscissen		Doppelter Inhalt aus			
	y_m	Differenz $y_{m-1} - y_{m+1}$	x_m	Differenz $x_{m+1} - x_{m-1}$	$y_m (x_{m+1} - x_{m-1})$		$x_m (y_{m-1} - y_{m+1})$	
	± Fuß	± Fuß	± Fuß	± Fuß	+ Q. Fuß	— Q. Fuß	+ Q. Fuß	— Q. Fuß
A_1	0	— 837,064	0	—1080,911				
A_2	+ 837,064	—1386,464	— 183,772	+ 766,893	641938,6		254793,3	
A_3	+1386,464	— 115,454	+ 766,893	+1598,809	2216690,0			88540,9
A_4	+ 952,518	— 52,073	+1415,037	+1435,171	1367025,6			73683,2
A_5	+1438,537	+ 182,240	+2202,064	+1452,368	2089277,1		401304,1	
A_6	+ 770,278	+1268,218	+2867,405	+ 493,805	380367,1		3636495,3	
A_7	+ 170,319	+ 339,356	+2695,869	— 817,984		139285,8	914859,6	
A_8	+ 430,922	+ 549,886	+2049,421	— 884,471		381569,2	1126949,6	
A_9	— 379,567	+ 955,946	+1810,398	— 841,719	319488,7		1730642,1	
A_{10}	— 525,024	— 379,567	+1207,702	— 913,259	479482,7			458401,8
A_{11}	0	— 525,024	+ 897,139	—1207,702				471005
					7494270	520855	8065044	1091631
					520855		1091631	
				Doppelter Inhalt =	6973415		6973413	

Inhalt des Elfecks = 3486707 Q.Fuß = 87 Morg. 67 Q.Ruth. 7 Q.Fuß.

§. 22. Berechnung des Inhaltes aus den Seiten und Polygonwinkeln.

Um einen Ausdruck für den Inhalt eines Polygons zu erhalten, in welchem nur die Seiten und Winkel vorkommen, substituire man in die Gl. (7) des §. 20 nach §. 17 die Werthe der Coordinaten und reducire. Wir wollen, des besseren Verständnisses wegen, der Entwickelung ein bestimmtes Polygon z. B. ein Fünfeck zu Grunde legen. Das allgemeine Verfahren wird sich hieraus leicht ableiten lassen.

Nach §. 20 (7) erhält man für ein Fünfeck unter Beibehaltung des Gliedes $y_5 x_4$, das bekanntlich Null ist:

$$\begin{aligned}
2J = {} & s_1 \sin A_1 \, [s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2)] + [s_1 \sin A_1 \\
& - s_2 \sin \Sigma(A_2)] [s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2) + s_3 \cos \Sigma(A_3)] \\
& + [s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2) + s_3 \sin \Sigma(A_3)] [s_1 \cos A_1 \\
& - s_2 \cos \Sigma(A_2) + s_3 \cos \Sigma(A_3) - s_4 \cos \Sigma(A_4)] \\
- \{ & [s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2)] \, s_1 \cos A_1 + [s_1 \sin A_1 - \\
& s_2 \sin \Sigma(A_2) + s_3 \sin \Sigma(A_3)] [s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2)] \\
& + [s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2) + s_3 \sin \Sigma(A_3) - s_4 \sin \Sigma(A_4)] \\
& [s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2) + s_3 \cos \Sigma(A_3)] \}
\end{aligned}$$

oder wenn man die angedeuteten Multiplicationen ausführt und zusammenzieht,

$$\begin{aligned}
2J = {} & - 3 s_1 s_2 \sin A_1 \cos \Sigma(A_2) - 2 s_1 s_2 \sin \Sigma(A_2) \cos A_1 \\
& + 3 s_1 s_2 \sin \Sigma(A_2) \cos A_1 + 2 s_1 s_2 \sin A_1 \cos \Sigma(A_2) \\
+ {} & 2 s_1 s_3 \sin A_1 \cos \Sigma(A_3) + s_1 s_3 \sin \Sigma(A_3) \cos A_1 \\
& - 2 s_1 s_3 \cos A_1 \sin \Sigma(A_3) - s_1 s_3 \cos \Sigma(A_3) \sin A_1 \\
- {} & 2 s_2 s_3 \sin \Sigma(A_2) \cos \Sigma(A_3) - s_2 s_3 \sin \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_2) \\
& + 2 s_2 s_3 \sin \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_2) + s_2 s_3 \sin \Sigma(A_2) \cos \Sigma(A_3) \\
- {} & s_1 s_4 \sin A_1 \cos \Sigma(A_4) + s_1 s_4 \sin \Sigma(A_4) \cos A_1 \\
& + s_2 s_4 \sin \Sigma(A_2) \cos \Sigma(A_4) - s_2 s_4 \sin \Sigma(A_4) \cos \Sigma(A_2) \\
- {} & s_3 s_4 \sin \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_4) + s_3 s_4 \sin \Sigma(A_4) \cos \Sigma(A_3) \\
= {} & s_1 s_2 [\sin \Sigma(A_2) \cos A_1 - \sin A_1 \cos \Sigma(A_2)] - s_1 s_3 [\sin \Sigma(A_3) \\
& \cos A_1 - \sin A_1 \cos \Sigma(A_3)] \\
+ {} & s_1 s_4 [\sin \Sigma(A_4) \cos A_1 - \sin A_1 \cos \Sigma(A_4)] + s_2 s_3 \\
& \sin \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_2) - \sin \Sigma(A_2) \cos \Sigma(A_3)] \\
- {} & s_2 s_4 [\sin \Sigma(A_4) \cos \Sigma(A_2) - \sin \Sigma(A_2) \cos \Sigma(A_4)] \\
& + s_3 s_4 [\sin \Sigma(A_4) \cos \Sigma(A_3) - \sin \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_4)]
\end{aligned}$$

oder da allgemein

$$\sin\varphi\cos\psi - \sin\psi\cos\varphi = \sin(\varphi-\psi)$$

ist,

$$\begin{aligned}
2J &= s_1 s_2 \sin[\Sigma(A_2)-A_1] - s_1 s_3 \sin[\Sigma(A_3)-A_1] \\
&\quad + s_1 s_4 \sin[\Sigma(A_4)-A_1] \\
&\quad + s_2 s_3 \sin[\Sigma(A_3)-\Sigma(A_2)] - s_2 s_4 \sin[\Sigma(A_4)-\Sigma(A_2)] \\
&\quad + s_3 s_4 \sin[\Sigma A_4)-\Sigma(A_3)] \\
&= s_1[s_2\sin A_2 - s_3\sin(A_2+A_3)+s_4\sin(A_2+A_3+A_4)] \\
&\quad + s_2[s_3\sin A_3 - s_4\sin(A_3+A_4)] + s_3 s_4 \sin A_4.
\end{aligned}$$

Führt man dieselbe Entwickelung für ein $n$eck aus, so erhält man die allgemeine Inhaltsformel

$$\begin{aligned}
2J &= s_1[s_2\sin A_2 - s_3\sin(A_2+A_3)+s_4\sin(A_2+A_3+A_4) \\
&\quad - \ldots \pm s_{n-1}\sin(A_2+A_3+\ldots+A_{n-1})] \\
&\quad + s_2[s_3\sin A_3 - s_4\sin(A_3+A_4)+s_5\sin(A_3+A_4+A_5) \\
&\quad - \ldots \mp s_{n-1}\sin(A_3+A_4+\ldots+A_{n-1})] \\
&\quad + s_3[s_4\sin A_4 - s_5\sin(A_4+A_5)+s_6\sin(A_4+A_5+A_6) \\
&\quad - \ldots \pm s_{n-1}\sin(A_4+A_5+\ldots+A_{n-1})] \\
&\quad + \ldots\ldots + s_{n-3}[s_{n-2}\sin A_{n-2} - s_{n-1}\sin(A_{n-2}+A_{n-1})] \\
&\quad + s_{n-2}\,.\,s_{n-1}\sin A_{n-1}.
\end{aligned}$$

Da es nicht ohne Interesse ist, auch eine von der früheren Inhaltsformel unabhängige Entwickelung zu kennen, so möge nachstehend eine solche Platz finden.

Um wieder einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, sei (Fig. 28) $A_1 A_2 A_3 \ldots A_6$ ein Sechseck, dessen Inhalt J_6 bestimmt werden soll.

Zieht man die Diagonalen A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 und bezeichnet die Inhalte der dadurch abgeschnittenen Polygone

$A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_3A_4A_5$

der Reihe nach durch

J_3 J_4 J_5

so folgt:

1) $2J_3 = s_1 s_2 \sin A_2 \ldots\ldots\ldots (1)$

2) $2J_4 = 2A_2A_1A_4 + 2A_2A_3A_4$

$= 2A_2A_1A_4 + s_2 s_3 \sin A_3$

oder, wenn man $A_4B \perp s_1$ errichtet,

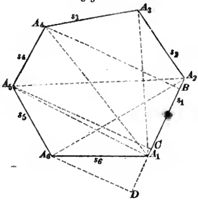
$2J_4 = s_1 . A_4B + s_2 s_3 \sin A_3.$

Betrachtet man nun A_4B als Ordinate des Punktes A_4 in

Bezug auf A_1 als Anfangspunkt aus A_2A_1 als positive Abscissenachse, so ist nach §. 17. 3

$$A_4B = s_2 \sin A_2 - s_3 \sin(A_2 + A_3)$$

Fig. 28.



und somit

$$2J_4 = s_1 [s_2 \sin A_2 - s_3 \sin(A_2 + A_3)] + s_2 s_3 \sin A_3 \ldots (2).$$

3) $2J_5 = 2\,A_5A_1A_2 + 2\,A_5A_2A_3A_4$

oder, wenn man $A_5C \perp s_1$ zieht,

$$2J_5 = s_1 . A_5C + 2A_5A_2A_3A_4.$$

Sieht man nun wieder den Perpendikel A_5C als Ordinate des Punktes A_5 in Bezug auf s_1 als Abscissenachse und A_2 als Anfangspunkt an, setzt also nach §. 17 3

$$A_5C = s_2 \sin A_2 - s_3 \sin(A_2 + A_3) + s_4 \sin(A_2 + A_3 + A_4)$$

und nach der eben für $2J_4$ entwickelten Formel (2)

$$2A_5A_2A_3A_4 = s_2 [s_3 \sin A_3 + s_4 \sin(A_3 + A_4)] + s_3 s_4 \sin A_4,$$

so erhält man:

$$2J_5 = s_1 [s_2 \sin A_2 - s_3 \sin(A_2 + A_3) + s_4 \sin(A_2 + A_3 + A_4)]$$
$$+ s_2[s_3 \sin A_3 - s_4 \sin(A_3 + A_4)] + s_3 s_4 \sin A_4 \ldots (3).$$

Ganz analog findet man:

$$2J_6 = 2A_6A_1A_2 + 2A_6A_2A_3A_4A_5$$
$$= s_1 . A_6D + 2A_6A_2A_3A_4A_5$$

oder wenn man nach §. 17. 3

$$A_6D = s_2 \sin A_2 - s_3 \sin(A_2 + A_3) + s_4 \sin(A_2 + A_3 + A_4)$$
$$- s_5 \sin(A_2 + A_3 + A_4 + A_5)$$

und nach vorstehender Formel (3)

$$2A_6A_2A_3A_4A_5 = s_2[s_3\sin A_3 - s_4\sin(A_3+A_4) + s_5\sin(A_3 + A_4 + A_5)] + s_3[s_4\sin A_4 - s_5\sin(A_4 + A_5)] + s_4 s_5 \sin A_5$$

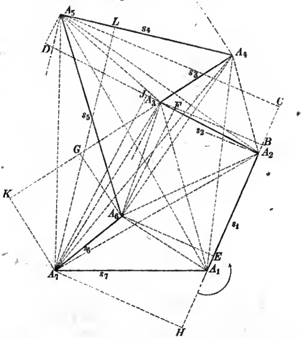
setzt,

$$2J_6 = s_1[s_2\sin A_2 - s_3\sin(A_2+A_3) + s_4\sin(A_2+A_3+A_4) - s_5\sin(A_2 + A_3 + A_4 + A_5)] + s_2[s_3\sin A_3 - s_4\sin(A_3+A_4) + s_5\sin(A_3+A_4+A_5)] + s_3[s_4\sin A_4 - s_5\sin(A_4 + A_5)] + s_4 s_5 \sin A_5 \ldots.(4).$$

Allgemein wird man hiernach für den doppelten Inhalt eines $n$ecks wieder die schon oben mitgetheilte Formel erhalten.

Anmerkung. Wir haben bei der Herleitung dieser Formel stillschweigend ein Polygon mit lauter concaven Winkeln vorausgesetzt; daß dieselbe aber auch für ein solches mit convexen Winkeln gilt, geht aus nachstehender Betrachtung hervor.

Fig. 29.



Das Siebeneck $A_1A_2A_3\ldots A_7$ (Fig. 29) habe bei A_3 und A_6 convexe Winkel. Denkt man sich von A_1 aus nach den

übrigen Eckpunkten die Diagonalen gezogen und sieht in den dadurch der Reihe nach abgeschnittenen Vielecken, nämlich in dem Vierecke $A_1A_2A_3A_4 = J_4$, dem Fünfecke $A_1A_2A_3A_4A_5 = J_5$, dem Sechsecke $A_1A_2 \ldots A_6 = J_6$ u. s. w., stets den letzten Eckpunkt, A_4, A_5, A_6 u. s. f., als den Punkt an, von welchem aus nach der in §. 3 angegebenen Weise die betreffende Figur jedesmal in Dreiecke zerlegt wird, und betrachtet von diesen diejenigen als positiv, welche von der letzten Seite bei ihrer Umdrehung um jenen Punkt in der Richtung des beigefügten Pfeiles durchlaufen werden, so hat man nach §. 3. 7

1) $$2J_4 = 2A_4A_1A_2 - 2A_4A_2A_3$$

oder, wenn man $A_4B \perp s_1$ zieht:

$$2J_4 = s_1 . A_4B - 2A_4A_2A_3.$$

Nun ist aber für s_1 als Abscissenachse und A_2 als Anfang die Ordinate

$$A_4B = s_2 \sin A_2 - s_3 \sin (A_2 + A_3)$$

und

$$2A_4A_2A_3 = s_2 s_3 \sin (4\mathfrak{R} - A_3) - s_2 s_3 \sin A_3$$

somit auch

$$2J_4 = s_1[s_2 \sin A_2 - s_3 \sin(A_2 + A_3)] + s_2 s_3 \sin A_3 \ldots (1).$$

2) $$2J_5 = 2A_5A_1A_2 - 2A_5A_2A_3 + 2A_5A_3A_4$$
$$= s_1 . A_5C - s_2 . A_5D + s_3 s_4 \sin A_4$$

oder, da in Bezug auf s_1 als Abscissenachse, A_2 als Anfangspunkt

$$A_5C = s_2 \sin A_2 - s_3 (A_2 + A_3) + s_4 \sin (A_2 + A_3 + A_4)$$

und in Bezug auf s_2 als Abscissenachse und A_3 als Anfang

$$A_5D = -[s_3 \sin A_3 - s_4 \sin (A_3 + A_4)]$$ *)

ist, wird

$$2J_5 = s_1 [s_2 \sin A_2 - s_3 \sin (A_2 + A_3) + s_4 \sin (A_2 + A_3 + A_4)]$$
$$+ s_2[s_3 \sin A_3 - s_4 \sin(A_3 + A_4)] + s_3 s_4 \sin A_4 \ldots (2).$$

3) $$2J_6 = A_6A_1A_2 + A_6A_2A_3 - A_6A_3A_4 + A_6A_4A_5$$
$$= s_1 . A_6 E + s_2 . A_6 F - s_3 . A_6 G + s_4 s_5 \sin A_5$$
$$= s_1 [s_2 \sin A_2 - s_3 \sin (A_2 + A_3) + s_4 \sin (A_2 + A_3 + A_4) - s_5 \sin (A_2 + A_3 + A_4 + A_5)]$$
$$+ s_2 [s_3 \sin A_3 - s_4 \sin (A_3 + A_4) + s_5 \sin (A_3 + A_4 + A_5)]$$
$$+ s_3 [s_4 \sin A_4 - s_5 \sin (A_4 + A_5)]$$ **) $$+ s_4 s_5 \sin A_5 \ldots (3).$$

---

*) Die Ordinate des Punktes A_5 wird nämlich in diesem Falle negativ, da die positive Ordinatenachse bei der Verlegung der Abscissenachse in die Polygonseiten jeweils die durch —.—.—. angedeutete Lage annimmt.

**) Denn die Ordinate A_6G wird in Bezug auf s_3 als Abscissenachse negativ.

4) $2J_7 = A_7A_1A_2 + A_7A_2A_3 - A_7A_3A_4 + A_7A_4A_5$
$- A_7A_5A_6$
$= s_1 . A_7H + s_2 . A_7J + s_3 . A_7K + s_4 . A_7L$
$+ s_5 s_6 . \sin A_6$
$= s_1 [s_2 \sin A_2 - s_3 \sin(A_2 + A_3) + s_4 \sin(A_2$
$+ A_3 + A_4) - s_5 \sin(A_2 + A_3 + A_4 + A_5)$
$+ s_6 \sin(A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6)]$
$+ s_2 [s_3 \sin A_3 - s_4 \sin(A_3 + A_4) + s_5 \sin(A_3$
$+ A_4 + A_5) - s_6 \sin(A_3 + A_4 + A_5 + A_6)]$
$+ s_3 [s_4 \sin A_4 - s_5 \sin(A_4 + A_5) + s_6 \sin(A_4$
$+ A_5 + A_6)]$
$+ s_4 [s_5 \sin A_5 - s_6 \sin(A_5 + A_6)] + s_5 s_6 \sin A_6 \ldots (4).$

Man ersieht hieraus, wie man bei jeder speciellen Form des Polygons zu verfahren hat, um schließlich dafür die Richtigkeit der obigen allgemeinen Inhaltsformel nachzuweisen.

§. 23. Beispiel.

Von einem Siebeneck $A_1A_2 \ldots A_7$ kennt man

die Seiten:	die Winkel:
$s_1 = 370'$	$A_2 = 197^\circ\ 3'\ 0{,}08''$
$s_2 = 904'$	$A_3 = 97^\circ 37' 41{,}34''$
$s_3 = 56'$	$A_4 = 81^\circ 49' 43{,}56''$
$s_4 = 394'$	$A_5 = 188^\circ 10' 16{,}44''$
$s_5 = 1221'$	$A_6 = 9^\circ 31' 38{,}22''$.
$s_6 = 419'$.	

Man soll den Inhalt desselben unmittelbar hieraus berechnen.

Auflösung.

Da

$\sin A_2 = \sin 197^\circ 3' 0{,}08'' = - \sin 17^\circ 3' 0{,}08''$

$\sin(A_2 + A_3) = \sin 294^\circ 40' 41{,}42'' = - \sin 65^\circ 19' 18{,}58''$

$\sin(A_2 + A_3 + A_4) = \sin 376^\circ 30' 24{,}98'' = \sin 16^\circ 30' 24{,}98''$

$\sin(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = \sin 564^\circ 40' 41{,}42'' = - \sin 24^\circ$
$40' 41{,}42''$

$\sin(A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6) = \sin 574^\circ 12' 19{,}64''$
$= - \sin 34^\circ 12' 19{,}64''$

$\sin A_3 = \sin 97^\circ 37' 41{,}34'' = \sin 82^\circ 22' 18{,}66''$

$\sin(A_3 + A_4) = \sin 179^\circ 27' 24{,}9'' = \sin 0^\circ 32' 35{,}1''$

$\sin(A_3 + A_4 + A_5) = \sin 367^\circ 37' 41{,}34'' = \sin 7^\circ 37' 41{,}34''$

$\sin(A_3 + A_4 + A_5 + A_6) = \sin 377^\circ\, 9'\, 19{,}56'' = \sin 17^\circ\, 9'\, 19{,}56''$

$\sin A_4 = \sin 81^\circ\, 49' 43{,}56''$

$\sin(A_4 + A_5) = \sin 270^\circ = -1$

$\sin(A_4 + A_5 + A_6) = \sin 279^\circ\, 31' 38{,}22'' = -\sin 80^\circ\, 28' 21{,}78''$

$\sin A_5 = \sin 188^\circ\, 10' 16{,}44'' = -\sin 8^\circ\, 10' 16{,}44''$

$\sin(A_5 + A_6) = \sin 197^\circ\, 41' 54{,}66'' = -\sin 17^\circ\, 41' 54{,}66''$

$\sin A_6 = \sin 9^\circ\, 31' 38{,}32''$

so erhält man nach Gl. (4) des §. 22 für

$$2J = 370\,[-904 \sin 17^\circ\, 3'\, 0{,}08'' + 56 \sin 65^\circ\, 19'\, 18{,}58'' + 394 \sin 16^\circ\, 30'\, 24{,}98'' + 1221 \sin 24^\circ\, 40'\, 41{,}42'' - 419 \sin 34^\circ\, 12'\, 19{,}64''] + 904\,[56 \sin 82^\circ\, 22'\, 18{,}66'' - 394 \sin 0^\circ\, 32' 35{,}1'' + 1221 \sin 7^\circ\, 37' 41{,}34'' - 419 \sin 17^\circ\, 9'\, 19{,}56''] + 56\,[394 \sin 81^\circ\, 49'\, 43{,}56'' + 1221 - 419 \sin 80^\circ\, 28' 21{,}78''] + 394\,[-1221 \sin 8^\circ\, 10' 16{,}44'' + 419 \sin 17^\circ\, 41' 54{,}66''] + 1221 . 419 \sin 9^\circ\, 31' 38{,}22''$$

$$= 370\,[-265{,}05835 + 50{,}88536 + 111{,}9477 + 509{,}79306 - 235{,}5459] + 904\,[55{,}5044 - 3{,}734325 + 162{,}0797 - 123{,}5903] + 56\,[390 + 1221 - 413{,}2206] + 394\,[-173{,}54316 + 127{,}3707] + 84678{,}4706$$

$$= 63648{,}0919 + 81594{,}5880 + 67075{,}6464 - 18191{,}9256 + 84678{,}4706$$

$$= 296996{,}7969 - 18191{,}9256$$

$$= 278804{,}8713$$

also ist

$J = 139402{,}4357$ Q.Fuß $= 3$ Morg. 1 Vtl. 94 Q.Rth. 2 Q.Fuß.

Sechster Abschnitt.

Berechnung fehlender Seiten und Winkel eines Polygons.

---

§. 24. Aufgabe.

Von einem necke kennt man alle Seiten bis auf zwei und alle Winkel bis auf einen; man soll die fehlenden Stücke berechnen.

Auflösung.

Den fehlenden Winkel findet man unmittelbar auf die in §. 2. 4 angegebene Weise. Wählt man nun die Aufeinanderfolge der Eckpunkte so, daß die letzte Seite s_n eine der unbekannten ist und bezeichnet s_k die andere, so hat man nach §. 17:

$$0 = s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2) + s_3 \sin \Sigma(A_3) - \ldots \pm s_k \sin \Sigma(A_k) \mp \ldots \pm s_{n-1} \sin \Sigma(A_{n-1}) \ldots (1)$$

und

$$s_n = s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2) + s_3 \cos \Sigma(A_3) - \ldots \pm s_k \cos \Sigma(A_k) \mp \ldots \pm s_{n-1} \cos \Sigma(A_{n-1}) \ldots (2).$$

Aus der Gleichung (1) läßt sich nun leicht der Werth von s_k und hiernach aus (2) der von s_n berechnen.

Will man bei der Berechnung von den Azimuthen Gebrauch machen, so wende man die Formeln (10) des §. 15 an.

Man findet alsdann aus der Gleichung

$$0 = s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + \ldots + s_k \sin \alpha_k + \ldots + s_{n-1} \sin \alpha_{n-1} \ldots (3)$$

die Seite s_k und mittelst dieser aus der Gleichung

$$s_n = s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + \ldots + s_k \cos \alpha_k + \ldots + s_{n-1} \cos \alpha_{n-1} \ldots (4)$$

die Seite s_n.

§. 25. Beispiel.

Von einem Sechsecke $A_1 A_2 \ldots . A_6$ kennt man vier Seiten, nämlich $s_1 = 193'$; $s_2 = 4272'$; $s_4 = 2776{,}8'$; $s_5 = 1424'$ und die Winkel: $A_1 = 144^0\,29'\,14{,}28''$; $A_2 = 172^0\,37'\,2{,}02''$; $A_3 = 59^0\,29'\,23{,}144''$; $A_4 = 90^0$; $A_6 = 96^0\,1'\,32{,}07''$. Man soll die fehlenden Seiten s_3, s_6 und den Winkel A_5 berechnen.

Auflösung.

Die Summe der fünf gegebenen Winkel beträgt $562^0\,37'\,11{,}514''$, die Summe der Winkel des Sechsecks aber $8R = 720''$; es ist somit der Winkel

$$A_5 = 720^0 - 562^0\,37'\,11{,}514'' = 157^0\,22'\,48{,}486''.$$

Führt man nun in die Gl. (1) des §. 24 die Werthe der Seiten ein und setzt:

$$\begin{aligned}
\sin A_1 &= \sin 144^0\,29'\,14{,}28'' &&= \sin 35^0\,30'\,45{,}72'' \\
\sin \Sigma(A_2) &= \sin 317^0\;\;6'\,16{,}3'' &&= -\sin 42^0\,53'\,43{,}7'' \\
\sin \Sigma(A_3) &= \sin 376^0\,35'\,39{,}444'' &&= \sin 16^0\,35'\,39{,}444'' \\
\sin \Sigma(A_4) &= \sin 466^0\,35'\,39{,}444'' &&= \sin 73^0\,24'\,20{,}556'' \\
\sin \Sigma(A_5) &= \sin 623^0\,58'\,27{,}93'' &&= -\sin 83^0\,58'\,27{,}93''
\end{aligned}$$

so folgt:

$$\begin{aligned}
0 = {}& 193 \sin 35^0\;30'\;45{,}72'' + 4272 \sin 42^0\;53'\;43{,}7'' \\
& + s_3 \sin 16^0\,35'\,39{,}444'' - 2776{,}8 \sin 73^0\,24'\,20{,}556'' \\
& - 1424 \sin 83^0\,58'\,27{,}93''
\end{aligned}$$

und hieraus

$$s_3 = \frac{2776{,}8 \sin 73^0\,24'\,20{,}556'' + 1424 \sin 83^0\,58'\,27{,}93'' - 193 \sin 35^0\,30'\,45{,}72'' - 4272 \sin 42^0\,53'\,43{,}7''}{\sin 16^0\,35'\,39{,}444''}$$

oder $s_3 = 3702{,}4'$.

Substituirt man diesen Werth in obige Gleichung (2) und setzt:

$$\begin{aligned}
\cos A_1 &= \cos 144^0\,29'\,14{,}28'' &&= -\cos 35^0\,30'\,45{,}72'' \\
\cos \Sigma(A_2) &= \cos 317^0\;\;6'\,16{,}3'' &&= \cos 42^0\,53'\,43{,}7'' \\
\cos \Sigma(A_3) &= \cos 376^0\,35'\,39{,}444'' &&= \cos 16^0\,35'\,39{,}444'' \\
\cos \Sigma(A_4) &= \cos 466^0\,35'\,39{,}444'' &&= -\cos 73^0\,24'\,20{,}556'' \\
\cos \Sigma(A_5) &= \cos 623^0\,58'\,27{,}93'' &&= -\cos 83^0\,58'\,27{,}93''
\end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{aligned}
s_6 = {}& -193 \cos 35^0\,30'\,45{,}72'' - 4272 \cos 42^0\,53'\,43{,}7'' + \\
& 3702{,}4 \cos 16^0\,35'\,39{,}444'' + 2776{,}8 \cos 73^0\,24'\,20{,}556'' \\
& - 1424 \cos 83^0\,58'\,27{,}93''
\end{aligned}$$

oder $s_6 = 905'$

Um die Formeln (3) und (4) bei der Berechnung zu benützen, bestimme man zuerst die Azimuthe in Bezug auf $A_1A_6 = s_6$ als Abscissenachse und A_1 als Anfangspunkt wie folgt:

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 = 144^\circ\, 29'\, 14{,}28'' = A_1 & & \alpha_3 = 16^\circ\, 35'\, 39{,}444'' & \\
 172^\circ\, 37'\ \ 2{,}02'' = A_2 & & 90^\circ = A_4 & \\
 317^\circ\ \ 6'\, 16{,}3'' & & 106^\circ\, 35'\, 39{,}444'' & \\
 - 180^\circ & & + 180^\circ & \\
\alpha_2 = 137^\circ\ \ 6'\, 16{,}3'' & & \alpha_4 = 286^\circ\, 35'\, 39{,}444'' & \\
 59^\circ\, 29'\, 23{,}144'' = A_3 & & 157^\circ\, 22'\, 48{,}486'' = A_5 & \\
 196^\circ\, 35'\, 39{,}444'' & & 443^\circ\, 58'\, 27{,}93'' & \\
 - 180^\circ & & - 180^\circ & \\
\alpha_3 = 16^\circ\, 35'\, 39{,}444'' & & \alpha_5 = 263^\circ\, 58'\, 27{,}93''. &
\end{array}$$

Nach Gl. (3) hat man nun:

$$0 = 193 \sin 144^\circ\, 29'\, 14{,}28'' + 4272 \sin 137^\circ\, 6'\, 16{,}3'' + s_3 . \sin 16^\circ\, 35' 39{,}444'' + 2776{,}8 \sin 286^\circ\, 35' 39{,}444'' + 1424 \sin 263^\circ\, 58' 27{,}93''$$

oder

$$0 = 193 \sin 35^\circ\, 30'\, 45{,}72'' + 4272 \sin 42^\circ\, 53'\, 43{,}7'' + s_3 \sin 16^\circ\, 35'\, 39{,}444'' - 2776{,}8 \sin 73^\circ\, 24'\, 20{,}556'' - 1424 \sin 83^\circ\, 58'\, 27{,}93'',$$

woraus wieder folgt:

$$s_3 = 3702{,}4'.$$

Aus (4) erhält man alsdann wie vorhin:

$$s_6 = 905'.$$

§. 26. Aufgabe.

Von einem $n$ecke kennt man alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf die zwei an der unbekannten Seite liegenden; man soll die fehlenden Elemente berechnen.

Auflösung.

Bestimmt man die Aufeinanderfolge der Eckpunkte so, daß die unbekannte Seite als die letzte erscheint, so sind A_1 und A_n die fehlenden Winkel. Denkt man sich nun von der Ecke A_n aus auf die Richtung der Seite s_1 einen Perpendikel A_nB gefällt, so ist stets

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{A_nB}{A_1B}$$

oder, da für jeden Werth von A_1

$$A_1B = s_1 - A_2B$$

ist, auch

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{A_nB}{s_1 - A_2B}.$$

Sieht man nun A_2A_1 als Abscissenachse und A_2 als Anfangspunkt der Coordinaten an, so hat man nach §. 17:

$$A_nB = s_2 \sin A_2 - s_3 \sin(A_2 + A_3) + s_4 \sin(A_2 + A_3 + A_4)$$
$$- \ldots \pm s_{n-1} \sin(A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1}) \ldots (1)$$

$$A_2B = s_2 \cos A_2 - s_3 \cos(A_2 + A_3) + s_4 \cos(A_2 + A_3 + A_4)$$
$$- \ldots \pm s_{n-1} \cos(A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1}) \ldots (2)$$

folglich wird

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{s_2 \sin A_2 - s_3 \sin(A_2 + A_3) + \ldots \pm s_{n-1} \sin(A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1})}{s_1 - s_2 \cos A_2 + s_3 \cos(A_2 + A_3) + \ldots \mp s_{n-1} \cos(A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1})} \ldots (3).$$

Hierbei hat man natürlich wieder aus den Vorzeichen des Zählers und Nenners auf den Quadranten zu schließen, in welchen A_1 fällt.

Ist hiernach der Winkel A_1 berechnet, so findet man nach §. 2. 4 leicht den Winkel A_n. Die Seite s_n ergibt sich schließlich aus dem rechtwinkligen Dreiecke A_1A_nB, indem man hat:

$$s_n = A_1A_n = \sqrt{A_nB^2 + A_1B^2} \ldots (4).$$

Um diese Aufgabe mittelst der Azimuthe zu lösen, nummerire man die Eckpunkte in der Weise, daß die unbekannte Seite als die vorletzte s_{n-1} erscheint, also A_{n-1} und A_n die fehlenden Winkel werden. Bezeichnen nun x_{n-1}, y_{n-1} und x_n, y_n die Coordinaten der Punkte A_{n-1} und A_n in Bezug auf A_1A_n als positive Abscissenachse und A_1 als Anfangspunkt, so hat man nach §. 19. (2) für das Azimuth der Seite s_{n-1}:

$$\alpha_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

oder da bekanntlich

$$y_n = 0 \text{ und } x_n = s_n$$

ist,

$$\operatorname{tg} \alpha_{n-1} = -\frac{y_{n-1}}{s_n - x_{n-1}} = \frac{y_{n-1}}{x_{n-1} - s_n} \ldots (5).$$

Führt man in diese Gleichung nach §. 15 (6) die betreffenden Werthe ein, so folgt

$$\operatorname{tg} \alpha_{n-1} = \frac{s_1 \sin \alpha_1 + s_2 \sin \alpha_2 + \ldots + s_{n-2} \sin \alpha_{n-2}}{s_1 \cos \alpha_1 + s_2 \cos \alpha_2 + \ldots + s_{n-2} \cos \alpha_{n-2} - s_n} \ldots (6),$$

woraus das Azimuth α_{n-1} leicht zu bestimmen ist.

Hat man α_{n-1} gefunden, so folgt nach §. 13 für den in Frage stehenden Winkel A_{n-1} aus der Gleichung

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} + A_{n-1} \pm 2\Re$$

sofort

$$A_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} \mp 2\Re \ldots . (7).$$

Ist der Winkel A_{n-1} bestimmt, so ergibt sich der Winkel A_n nach §. 2. 4.

Die Seite s_{n-1} kann nun entweder aus einer der Gleichungen (10) des §. 15 oder auch unabhängig von α_{n-1} auf folgende Art berechnet werden.

Nach §. 19. (1) folgt, wenn man daselbst n statt m + 1, also n — 1 statt m setzt:

$$s_{n-1} = \sqrt{(y_n - y_{n-1})^2 + (x_n - x_{n-1})^2}$$

oder, da $y_n = 0$ und $x_n = s_n$ ist,

$$s_{n-1} = \sqrt{y_{n-1}^2 + (s_n - x_{n-1})^2} \ldots (8).$$

Substituirt man nun wieder nach §. 15 die betreffenden Werthe für y_{n-1} und x_{n-1}, so erhält man, wie aus obiger Gleichung (6) ersichtlich ist, einen von α_{n-1} unabhängigen Ausdruck für die Seite s_{n-1}.

§. 27. Beispiel.

Von einem Sechsecke $A_1 A_2 \ldots A_6$ kennt man fünf Seiten: 193′; 4272′; 3702,4′; 2776,8′; 1424′ und die der Reihe nach von ihnen eingeschlossenen Winkel: 172° 37′2,02″; 59° 29′23,144″; 90°; 157° 22′48,486″; man soll die sechste Seite und die daran liegenden Winkel berechnen.

Auflösung.

Setzt man in §. 26 Gl. (3)

$s_1 = 193$	$A_2 = 172^\circ\, 37'\, 2{,}02''$
$s_2 = 4272$	$A_3 = 59^\circ\, 29' 23{,}144''$
$s_3 = 3702{,}4$	$A_4 = 90^\circ$
$s_4 = 2776{,}8$	$A_5 = 157^\circ\, 22' 48{,}486''$
$s_5 = 1424$	

also

$$\sin A_2 = \sin 172^\circ\, 37' 2{,}02'' = \sin 7^\circ\, 22' 57{,}98''$$
$$\cos A_2 = \cos 172^\circ\, 37' 2{,}02'' = -\cos 7^\circ\, 22' 57{,}98''$$

$\sin(A_2+A_3) = \sin 232^\circ\, 6'\, 25{,}164'' = -\sin 52^\circ\, 6'\, 25{,}164''$
$\cos(A_2+A_3) = \cos 232^\circ\, 6'\, 25{,}164'' = -\cos 52^\circ\, 6'\, 25{,}164''$
$\sin(A_2+A_3+A_4) = \sin 322^\circ\, 6'\, 25{,}164'' = -\sin 37^\circ\, 53'\, 34{,}836''$
$\cos(A_2+A_3+A_4) = \cos 322^\circ\, 6'\, 25{,}164'' = \cos 37^\circ\, 53'\, 34{,}836''$
$\sin(A_2+A_3+A_4+A_5) = \sin 479^\circ\, 29'\, 13{,}65'' = \sin 60^\circ\, 30'\, 46{,}35''$
$\cos(A_2+A_3+A_4+A_5) = \cos 479^\circ\, 29'\, 13{,}65'' = -\cos 60^\circ\, 30'\, 46{,}35''$,

so folgt

$$\operatorname{tg} A_1 = (4272 \sin 7^\circ\, 22'\, 57{,}98'' + 3702{,}4 \sin 52^\circ\, 6'\, 25{,}164'' - 2776{,}8 \sin 37^\circ\, 53'\, 34{,}836 - 1424 \sin 60^\circ\, 30'\, 46{,}35'') : (193 + 4272 \cos 7^\circ\, 22'\, 57{,}98'' - 3702{,}4 \cos 52^\circ\, 6'\, 25{,}164'' - 2776{,}8 \cos 37^\circ\, 53'\, 34{,}836'' - 1424 \cos 60^\circ\, 30'\, 46{,}35'')$$
$$= \frac{525{,}7}{-736{,}658}$$

und hieraus

$$A_1 = 144^\circ\, 29'\, 14{,}28''.$$

Nun ist die Summe aller Winkel des Sechsecks $= 720^\circ$
und die der fünf bekannten Winkel . . . . . $= 623^\circ 58' 27{,}93''$
demnach $A_0 = 96^\circ\; 1' 32{,}07''$.

Nach §. 26. (4) wird schließlich

$$s_5 = \sqrt{525{,}7^2 + 736{,}658^2} = 905'.$$

Um die Lösung auch mit Hilfe der Azimuthe vorzunehmen, bestimmen wir zunächst diese, unter der Voraussetzung, daß $A_1 A_6$ die Abscissenachse, A_1 der Anfangspunkt, A_5 und A_6 die unbekannten Winkel seien, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 172^\circ\, 37'\; 2{,}02'' = A_1\\
&\quad\;\; \underline{59^\circ\, 29'\, 23{,}144''} = A_2\\
&\quad\;\; 232^\circ\;\, 6'\, 25{,}164''\\
&\quad \underline{-\,180^\circ}\\
\alpha_2 &= \;\;52^\circ\;\, 6'\, 25{,}164''\\
&\quad\;\; \underline{90^\circ} \qquad\qquad = A_3\\
&\quad\;\; 142^\circ\;\, 6'\, 25{,}164''\\
&\quad \underline{+\,180^\circ}\\
\alpha_3 &= 322^\circ\;\, 6'\, 25{,}164''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 322^\circ\ 6'25{,}164'' \\ & \ 157^\circ\ 22'48{,}486'' = A_4 \\ \hline & \ 479^\circ\ 29'13{,}65'' \\ & \div 180^\circ \\ \hline \alpha_4 &= 299^\circ\ 29'13{,}65''. \end{aligned}$$

Führt man nun diese Werthe in Gl. (6) des §. 26 ein und setzt $s_1 = 4272$; $s_2 = 3702{,}4$; $s_3 = 2776{,}8$; $s_4 = 1424$; $s_6 = 193$;

so erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha_5 = \frac{525{,}7}{736{,}658}$$

und hieraus

$$\alpha_5 = 35^\circ\ 30'45{,}72'',$$

also nach (7)

$$A_5 = \alpha_4 - \alpha_3 \mp 2\mathfrak{R} = 157^\circ\ 22'48{,}486''.$$

Der andere Winkel und die Seite sind nun leicht zu finden.

§. 28. Aufgabe.

Von einem $n$ecke kennt man alle Seiten und alle Winkel bis auf zwei; man soll diese bestimmen.

Auflösung.

Liegen die fehlenden Winkel an einer und derselben Seite, so kann man diese als die letzte ansehen und nun genau nach dem in der vorhergehenden Aufgabe mitgetheilten Verfahren die Winkel berechnen. Wir setzen darum voraus, daß die unbekannten Winkel an verschiedenen Seiten liegen.

Bezeichnet man die Eckpunkte der Art, daß einer der fehlenden Winkel der letzte, also A_n wird, und ist A_k der andere, so zerlege man in den Gleichungen

$$0 = s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2) + \ldots \pm s_k \sin \Sigma(A_k) \mp s_{k+1} \sin \Sigma(A_{k+1}) \pm \ldots\ldots \pm s_{n-1} \sin \Sigma(A_{n-1})$$

$$s_n = s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2) + \ldots \pm s_k \cos \Sigma(A_k) \mp s_{k+1} \cos \Sigma(A_{k+1}) \pm \ldots \pm s_{n-1} \cos \Sigma(A_{n-1})$$

jedes Glied, in welchem A_k vorkommt, nach den Relationen

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

und bestimme in denselben die Coefficienten von $\sin A_k$ und $\cos A_k$. Man erhält alsdann zwei Gleichungen von der Form:

$$B \sin A_k + C \cos A_k = D$$
$$C \sin A_k - B \cos A_k = E,$$

woraus sich die Werthe von $\sin A_k$ und $\cos A_k$ berechnen lassen. Durch Division beider ergibt sich endlich $\operatorname{tg} A_k$.

Hat man A_k gefunden, so ist A_n nach §. 2. 4 leicht zu berechnen.

Anmerkung. Man kann die Auflösung auch in der Weise vornehmen, daß man das Polygon durch die Diagonale $A_k A_n$ in zwei andere zerlegt, in diesen nach §. 26 die an der Diagonale liegenden Winkel berechnet und hieraus schließlich die fehlenden Winkel bestimmt.

§. 29. Beispiel.

Von einem Sechseck $A_1 A_2 \ldots A_6$ kennt man der Reihe nach

die Seiten:	die Winkel:
$s_1 = 193'$	$A_1 = 144^\circ\, 29'\, 14{,}28''$
$s_2 = 4272'$	$A_2 = 172^\circ\, 37'\, 2{,}02''$
$s_3 = 3702{,}4'$	$A_4 = 90^\circ$
$s_4 = 2776{,}8'$	$A_5 = 157^\circ\, 22'\, 48{,}486''$
$s_5 = 1424'$	
$s_6 = 905'$	

Man soll die Winkel A_3 und A_6 berechnen.

Auflösung.

Aus den Gleichungen

$$0 = s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2) + s_3 \sin \Sigma(A_3) - s_4 \sin \Sigma(A_4) + s_5 \sin \Sigma(A_5)$$

$$s_6 = s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2) + s_3 \cos \Sigma(A_3) - s_4 \cos \Sigma(A_4) + s_5 \cos \Sigma(A_6)$$

folgt, wenn man die mit dem unbekannten Winkel A_3 behafteten Glieder auf einerlei Seite bringt:

$$s_3 \sin[(A_1 + A_2) + A_3] - s_4 \sin[(A_1 + A_2 + A_4) + A_3] + s_5 \sin[(A_1 + A_2 + A_4 + A_5) + A_3] = -s_1 \sin A_1 + s_2 (A_1 + A_2)$$

$$s_3 \cos[(A_1 + A_2) + A_3] - s_4 \cos[(A_1 + A_2 + A_4) + A_3] + s_5 \cos[(A_1 + A_2 + A_4 + A_5) + A_3] = s_6 - s_1 \cos A_1 + s_2 \cos(A_1 + A_2).$$

Nun ist aber

$s_3 \sin[(A_1+A_2)+A_3] = s_3 \sin(A_1+A_2)\cos A_3 + s_3 \cos(A_1+A_2)\sin A_3$

$s_4 \sin[(A_1+A_2+A_4)+A_3] = s_4 \sin(A_1+A_2+A_4)\cos A_3 + s_4\cos(A_1+A_2+A_4)\sin A_3$

$s_5 \sin[(A_1+A_2+A_4+A_5)+A_3] = s_5 \sin(A_1+A_2+A_4+A_5)\cos A_3 + s_5\cos(A_1+A_2+A_4+A_5)\sin A_3$

$s_3 \cos[(A_1+A_2)+A_3] = s_3 \cos(A_1+A_2)\cos A_3 - s_3 \sin(A_1+A_2)\sin A_3$

$s_4 \cos[(A_1+A_2+A_4)+A_3] = s_4 \cos(A_1+A_2+A_4)\cos A_3 - s_4 \sin(A_1+A_2+A_4)\sin A_3$

$s_5 \cos[(A_1+A_2+A_4+A_5)+A_3] = s_5 \cos(A_1+A_2+A_4+A_5)\cos A_3 - s_5 \sin(A_1+A_2+A_4+A_5)\sin A_3.$

Durch Einführung dieser Werthe in die vorstehenden zwei Gleichungen erhält man:

$[s_3 \sin(A_1+A_2) - s_4 \sin(A_1+A_2+A_4) + s_5 \sin(A_1+A_2+A_4+A_5)]\cos A_3 + [s_3\cos(A_1+A_2) - s_4\cos(A_1+A_2+A_4) + s_5 \cos(A_1+A_2+A_4+A_5)]\sin A_3 = -s_1 \sin A_1 + s_2 \sin(A_1+A_2)$

und

$[s_3 \cos(A_1+A_2) - s_4 \cos(A_1+A_2+A_4) + s_5 \cos(A_1+A_2+A_4+A_5)]\cos A_3 + [s_3\sin(A_1+A_2) - s_4\sin(A_1+A_2+A_4) + s_5 \sin(A_1+A_2+A_4+A_5)]\sin A_3 = s_0 - s_1 \cos A_1 + s_2 \cos(A_1+A_2).$

Nach obiger Aufgabe ist aber

$\sin A_1 = \sin 144^\circ 29' 14{,}28'' = \sin 35^\circ 30' 45{,}72''$

$\cos A_1 = \cos 144^\circ 29' 14{,}28'' = -\cos 35^\circ 30' 45{,}72''$

$\sin(A_1+A_2) = \sin 317^\circ 6' 16{,}3'' = -\sin 42^\circ 53' 43{,}7''$

$\cos(A_1+A_2) = \cos 317^\circ 6' 16{,}3'' = \cos 42^\circ 53' 43{,}7''$

$\sin(A_1+A_2+A_4) = \sin 407^\circ 6' 16{,}3'' = \sin 47^\circ 6' 16{,}3''$

$\cos(A_1+A_2+A_4) = \cos 407^\circ 6' 16{,}3'' = \cos 47^\circ 6' 16{,}3''$

$\sin(A_1+A_2+A_4+A_5) = \sin 564^\circ 29' 4{,}786'' = -\sin 24^\circ 29' 4{,}786''$

$\cos(A_1+A_2+A_4+A_5) = \cos 564^\circ 29' 4{,}786'' = -\cos 24^\circ 29' 4{,}786''$

und man hat somit die zwei Gleichungen:

$$[-3702{,}4 \sin 42^\circ\, 53'\, 43{,}7'' - 2776{,}8 \sin 47^\circ\, 6'\, 16{,}3'' - 1424 \sin 24^\circ\, 29'\, 4{,}786''] \cos A_3 + [3702{,}4 \cos 42^\circ\, 53'\, 43{,}7'' - 2776{,}8 \cos 47^\circ\, 6'\, 16{,}3'' - 1424 \cos 24^\circ\, 29'\, 4{,}786''] \sin A_3 = -193 \sin 35^\circ\, 30'\, 45{,}72'' - 4272 \sin 42^\circ\, 53'\, 43{,}7'',$$

$$[3702{,}4 \cos 42^\circ\, 53'\, 43{,}7'' - 2776{,}8 \cos 47^\circ\, 6'\, 16{,}3'' - 1424 \cos 24^\circ\, 29'\, 4{,}786''] \cos A_3 - [-3702{,}4 \sin 42^\circ\, 53'\, 43{,}7'' - 2776{,}8 \sin 47^\circ\, 6,\, 16{,}3'' - 1424 \sin 24^\circ\, 29'\, 4{,}786''] \sin A_3 = 905 + 193 \cos 35^\circ\, 30'\, 45{,}72'' + 4272 \cos 42^\circ\, 53'\, 43{,}7''$$

oder

$$[-2520{,}087 - 2034{,}321 - 590{,}176] \cos A_3 + [2712{,}429 - 1890{,}06 - 1295{,}943] \sin A_3 = -112{,}11 - 2907{,}792$$

$$[2712{,}429 - 1890{,}06 - 1295{,}943] \cos A_3 - [-2520{,}087 - 2034{,}321 - 590{,}176] \sin A_3 = 905 + 157{,}099 + 3129{,}725$$

oder

$$5144{,}584 \cos A_3 + 473{,}584 \sin A_3 = 3019{,}902$$

$$-473{,}584 \cos A_3 + 5144{,}584 \sin A_3 = 4191{,}824.$$

Multiplicirt man nun die erste dieser Gleichungen mit 473,584, die zweite mit 5144,584 und addirt, so folgt:

$$\sin A_3 = \frac{22995377}{26691031};$$

wenn man dagegen die erste mit 5144,584, die zweite mit 473,584 multiplicirt und subtrahirt:

$$\cos A_3 = \frac{13550959}{26691031}.$$

Aus diesen Werthen ergibt sich:

$$\operatorname{tg} A_3 = \frac{\sin A_3}{\cos A_3} = \frac{22995377}{13550959}$$

und hieraus

$$\sphericalangle A_3 = 59^\circ\, 29'\, 23''.$$

Der Winkel A_6 kann nun leicht nach Früherem berechnet werden. Man findet

$$\sphericalangle A_6 = 96^\circ\, 1'\, 32''.$$

Anmerkung. Die drei in den §§. 24—29 behandelten Fälle lassen nach §. 4 eine unzweideutige Lösung zu, während die nun folgenden stets eine genaue Kenntniß der Form der zu berechnenden Fläche voraussetzen, da ihnen im Allgemeinen zwei Auflösungen entsprechen. In der Praxis wird man diese darum möglichst zu vermeiden suchen.

§. 30. Aufgabe.

Von einem neck kennt man alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf zwei, welche an einer mit der unbekannten Seite zusammenstoßenden Seite liegen; man soll die fehlenden Stücke berechnen.

Auflösung.

Man bestimme die Aufeinanderfolge der Eckpunkte so, daß die unbekannte Seite die erste s_1 wird, also A_1 und A_n die fehlenden Winkel bezeichnen und erhebe alsdann jede der zwei Gleichungen

$$0 = s_1 \sin A_1 - s_2 \sin \Sigma(A_2) + \ldots \pm s_{n-1} \sin \Sigma(A_{n-1})$$

und

$$s_n = s_1 \cos A_1 - s_2 \cos \Sigma(A_2) + \ldots \pm s_{n-1} \cos \Sigma(A_{n-1})$$

zum Quadrate. Man erhält*):

$$\begin{aligned} 0 = {} & s_1^2 \sin^2 A_1 + s_2^2 \sin^2 \Sigma(A_2) + s_3^2 \sin^2 \Sigma(A_3) + \ldots \\ & + s_{n-1}^2 \sin^2 \Sigma(A_{n-1}) + 2\,[- s_1 s_2 \sin A_1 \sin \Sigma(A_2) \\ & + s_1 s_3 \sin A_1 \sin \Sigma(A_3) - \ldots \pm s_1 s_{n-1} \sin A_1 \sin \Sigma(A_{n-1}) \\ & - s_2 s_3 \sin \Sigma(A_2) \sin \Sigma(A_3) + \ldots \mp s_2 s_{n-1} \sin \Sigma(A_2) \sin \\ & \Sigma(A_{n-1}) - \ldots - \ldots - s_{n-2} s_{n-1} \sin \Sigma(A_{n-2}) \sin \Sigma(A_{n-1})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n^2 = {} & s_1^2 \cos^2 A_1 + s_2^2 \cos^2 \Sigma(A_2) + s_3^2 \cos^2 \Sigma(A_3) + \ldots \\ & + s_{n-1}^2 \cos^2 \Sigma(A_{n-1}) + 2\,[- s_1 s_2 \cos A_1 \cos \Sigma(A_2) \\ & + s_1 s_3 \cos A_1 \cos \Sigma(A_3) - \ldots \pm s_1 s_{n-1} \cos A_1 \cos \Sigma(A_{n-1}) \\ & - s_2 s_3 \cos \Sigma(A_2) \cos \Sigma(A_3) + \ldots \mp s_2 s_{n-1} \cos \Sigma(A_2) \cos \\ & \Sigma(A_{n-1}) - \ldots - \ldots - s_{n-2} s_{n-1} \cos \Sigma(A_{n-2}) \cos \Sigma(A_{n-1})]. \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt:

$$\begin{aligned} s_n^2 = {} & s_1^2 [\sin^2 A_1 + \cos^2 A_1] + s_2^2 [\sin^2 \Sigma(A_2) + \cos^2 \Sigma(A_2)] \\ & + \ldots + s_{n-1}^2 [\sin^2 \Sigma(A_{n-1}) + \cos^2 \Sigma(A_{n-1})] + \\ & 2\,\{- s_1 s_2 [\sin A_1 \sin \Sigma(A_2) + \cos A_1 \cos \Sigma A_2)] + \\ & s_1 s_3 [\sin A_1 \sin \Sigma(A_3) + \cos A_1 \cos \Sigma(A_3)] - \ldots \\ & \pm s_1 s_{n-1} [\sin A_1 \sin \Sigma(A_{n-1}) + \cos A_1 \cos \Sigma(A_{n-1})] \\ & - s_2 s_3 [\sin \Sigma(A_2) \sin \Sigma(A_3) + \cos \Sigma(A_2) \cos \Sigma(A_3)] \\ & + \ldots \mp s_2 s_{n-1} [\sin \Sigma(A_2) \sin \Sigma(A_{n-1}) + \cos \Sigma(A_2) \\ & \cos \Sigma(A_{n-1})] - \ldots - \ldots - s_{n-2} s_{n-1} [\sin \Sigma(A_{n-2}) \sin \Sigma(A_{n-1}) \\ & + \cos \Sigma(A_{n-2}) \cos \Sigma(A_{n-1})]\} \end{aligned}$$

*) Vergl. §. 104 des ersten Theiles meines Lehrbuches der allgemeinen Arithmetik.

oder da bekanntlich allgemein

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

und

$$\sin A \sin B + \cos A \cos B = \cos (A - B),$$

so geht vorstehende Gleichung nach gehöriger Reduction über in:

$$s_n^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \ldots + s_{n-1}^2 + 2 \{ - s_1 s_2 \cos A_2 + s_1 s_3 \cos (A_2 + A_3) - \ldots \pm s_1 s_{n-1} \cos (A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1}) - s_2 s_3 \cos A_3 + s_2 s_4 \cos (A_3 + A_4) - \ldots \mp s_2 s_{n-1} \cos (A_3 + A_4 + \ldots + A_{n-1}) \ldots\ldots - s_{n-2} s_{n-1} \cos A_{n-1} \}$$

worans s_1 gefunden werden kann.

Da die Bestimmungsgleichung eine quadratische ist, so geht daraus die oben erwähnte Zweideutigkeit der Aufgabe hervor.

Die Winkel sind nun leicht nach Vorhergehendem zu berechnen.

Um vorstehende Aufgabe mittelst der Azimuthe zu lösen, wähle man die Aufeinanderfolge der Eckpunkte der Art, daß die unbekannte Seite die letzte oder s_n wird, also A_{n-1} und A_n die fehlenden Winkel sind.

Nimmt man alsdann s_n als Abscissenachse an und berechnet die Coordinaten x_{n-1}, y_{n-1}, so hat man

$$(x_{n-1} - s_n)^2 = s_{n-1}^2 - y_{n-1}^2$$

woraus s_n gefunden werden kann.

Aus der Gleichung

$$\sin A_n = \frac{y_{n-1}}{s_{n-1}}$$

findet man hierauf den Winkel A_n zweideutig.

§. 31. Aufgabe.

In einem necke sind alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf zwei, welche an einer und derselben bekannten Seite liegen, gegeben; man soll die fehlenden Elemente berechnen.

Auflösung.

Man wähle die Aufeinanderfolge der Eckpunkte so, daß die zwei unbekannten Winkel der erste und letzte, also A_1 und A_n werden, bilde alsdann wieder die im Eingange der Auflösung der vorigen Aufgabe angeführten Gleichungen und operire mit

diesen genau auf die daselbst angegebene Weise. Man erhält alsdann eine quadratische Gleichung, in welcher nur die in Frage stehende Seite als Unbekannte auftritt u. s. w.

§. 32. Aufgabe.

In einem necke kennt man alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf zwei, von welchen der eine an der unbekannten Seite liegt, der andere aber keinen Schenkel mit diesem gemeinschaftlich hat; man soll die fehlenden Stücke berechnen.

Auflösung.

Sind z. B. A_k, A_n und s_n die fehlenden Stücke und man zieht die Diagonale $A_k A_n$, so entstehen zwei Polygone $A_1 A_2 \ldots A_k A_n$ und $A_n A_k A_{k+1} \ldots A_{n-1}$. Von diesen läßt sich das zweite nach §. 26 berechnen und man kennt alsdann von dem anderen alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf die zwei $A_k A_n A_1$ und $A_{k-1} A_k A_n$, welche an der mit der unbekannten Seite zusammenstoßenden Seite $A_n A_k$ liegen, wornach dieses nach §. 30 berechnet werden kann u. s. w.

Um einen Ausdruck für die fehlende Seite s_n direct herzuleiten, bilde man nach §. 15 (10) mittelst Zuziehung der Polygonwinkel die Gleichungen

$$-s_1 \sin A_1 + s_2 \sin \Sigma(A_2) - s_3 \sin \Sigma(A_3) + \ldots \pm s_{k-1} \sin \Sigma(A_{k-1}) = \pm s_k \sin \Sigma(A_k) \mp \ldots \pm s_{n-1} \sin \Sigma(A_{n-1}),$$

$$s_n - s_1 \cos A_1 + s_2 \cos \Sigma(A_2) - s_3 \cos \Sigma(A_3) + \ldots \pm s_{k-1} \cos \Sigma(A_{k-1}) = \pm s_k \cos \Sigma(A_k) \mp \ldots \pm s_{n-1} \cos \Sigma(A_{n-1}),$$

quadrire beide und addire sie. Man erhält alsdann analog wie in §. 30 zur Bestimmung der Seite s_n eine quadratische Gleichung.

Z. B. für ein Sechseck, in welchem die Winkel A_3, A_6 und die Seite s_6 fehlen, hat man:

$$-s_1 \sin A_1 + s_2 \sin \Sigma(A_2) = s_3 \sin \Sigma(A_3) - s_4 \sin \Sigma(A_4) + s_5 \sin \Sigma(A_5)$$

$$s_6 - s_1 \cos A_1 + s_2 \cos \Sigma(A_2) = s_3 \cos \Sigma(A_3) - s_4 \cos \Sigma(A_4) + s_5 \cos \Sigma(A_5)$$

und nach Quadrirung beider:

$$s_1^2 \sin A_1 + s_2^2 \sin^2 \Sigma(A_2) - 2 s_1 s_2 \sin A_1 \sin \Sigma(A_2) = s_3^2 \sin^2 \Sigma(A_3) + s_4^2 \sin^2 \Sigma(A_4) + s_5^2 \sin^2 \Sigma(A_5) - 2 s_3 s_4 \sin \Sigma(A_3) \sin \Sigma(A_4) + 2 s_3 s_5 \sin \Sigma(A_3) \sin \Sigma(A_6) - 2 s_4 s_5 \sin \Sigma(A_4) \sin \Sigma(A_5)$$

$$s_6^2 + s_1^2 \cos^2 A_1 + s_2^2 \cos^2 \Sigma(A_2) - 2 s_1 s_6 \cos A_1 + 2 s_2 s_6 \cos \Sigma(A_2) - 2 s_1 s_2 \cos A_1 \cos \Sigma(A_2) = s_3^2 \cos^2 \Sigma(A_3) + s_4^2 \cos^2 \Sigma(A_4) + s_5^2 \cos^2 \Sigma(A_5) - 2 s_3 s_4 \cos \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_4) + 2 s_3 s_5 \cos \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_5) - 2 s_4 s_5 \cos \Sigma(A_4) \cos \Sigma(A_5).$$

Durch Addition beider Gleichungen folgt:

$$s_6^2 + s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 [\sin A_1 \sin \Sigma(A_2) + \cos A_1 \cos \Sigma(A_2)] - 2 s_1 s_6 \cos A_1 + 2 s_2 s_6 \cos \Sigma(A_2) = s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 - 2 s_3 s_4 [\sin \Sigma(A_3) \sin \Sigma(A_4) + \cos \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_4)] + 2 s_3 s_5 [\sin \Sigma(A_3) \sin \Sigma(A_5) + \cos \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_5)] - 2 s_4 s_5 [\sin \Sigma(A_4) \sin \Sigma(A_5) + \cos \Sigma(A_4) \cos \Sigma(A_5)]$$

oder, wenn man

$$\sin A_1 \sin \Sigma(A_2) + \cos A_1 \cos \Sigma(A_2) = \cos [A_1 - \Sigma(A_2)] = \cos A_2$$

$$\sin \Sigma(A_3) \sin \Sigma(A_4) + \cos \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_4) = \cos [\Sigma(A_3) - \Sigma(A_4)] = \cos A_4$$

$$\sin \Sigma(A_3) \sin \Sigma(A_5) + \cos \Sigma(A_3) \cos \Sigma(A_5) = \cos [\Sigma(A_3) - \Sigma(A_5)] = \cos (A_4 + A_5)$$

setzt,

$$s_6^2 + s_1^2 + s_2^2 - 2 s_1 s_2 \cos A_2 - 2 s_1 s_6 \cos A_1 + 2 s_2 s_6 \cos (A_1 + A_2) = s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 - 2 s_3 s_4 \cos A_4 + 2 s_3 s_5 \cos (A_4 + A_5) - 2 s_4 s_5 \cos A_5,$$

woraus nun s_6 bestimmt werden kann.

§. 33. Aufgabe.

Von einem neck kennt man alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf zwei, welche getrennt liegen und nur von bekannten Seiten gebildet werden, man soll die fehlenden Stücke berechnen.

Auflösung.

Sind A_g und A_h die unbekannten Winkel und bezeichnet s_n die fehlende Seite, so läßt sich die vorliegende Aufgabe durch

die Diagonale $A_g A_h$ auf die in §. 26 und §. 31 behandelten Fälle zurückführen.

Um die Seite s_n jedoch direct zu bestimmen, kann man ähnlich wie in vorhergehender Aufgabe verfahren. Nur hat man alsdann die Ordnung der Eckpunkte so zu wählen, daß die Seite $A_h A_{h+1} = s_h$ als letzte erscheint.

§. 34. Aufgabe.

In einem neck sind alle Seiten und alle Winkel bis auf drei unmittelbar aufeinanderfolgende gegeben; man soll diese berechnen.

Auflösung.

Sind A_n, A_1, A_2 die drei fehlenden Winkel, so zerlege man das Polygon durch die Diagonale $A_2 A_n$ in ein $(n-1)$eck und ein Dreieck. Ersteres läßt sich nun leicht nach §. 26 berechnen. In dem Dreiecke $A_1 A_2 A_n$ kennt man alsdann die drei Seiten und findet hieraus die drei Winkel. Die zu suchenden Winkel ergeben sich nun leicht, da nach unserer Voraussetzung die Form des necks bekannt ist.

§. 35. Aufgabe.

Von einem neck sind alle Seiten und alle Winkel bis auf drei gegeben; zwei dieser fehlenden Winkel liegen unmittelbar neben einander, der dritte liegt von jedem der zwei anderen getrennt. Man soll die drei Winkel bestimmen.

Auflösung.

Bezeichnen A_1, A_2 und A_m die fehlenden Winkel, so zerlege man das Polygon durch die Diagonalen $A_m A_1$ und $A_m A_2$ in zwei Polygone und ein Dreieck. Die ersteren lassen sich nach §. 26 berechnen und von dem Dreiecke kennt man alsdann die drei Seiten, somit auch die drei Winkel. Aus der Bekanntschaft mit der Form des Polygons ergeben sich nun leicht die in Frage stehenden Polygonwinkel.

§. 36. Aufgabe.

Von einem neck kennt man alle Seiten und alle Winkel bis auf drei, von welchen nie zwei unmittelbar aufeinanderfolgen; man soll diese berechnen.

Auflösung.

Sind A_g, A_k und A_m die drei fehlenden Winkel und man denkt sich die Diagonalen $A_g A_k$, $A_k A_m$ und $A_m A_g$ gezogen, so entstehen drei Polygone, welche nach §. 26 berechnet werden können, und ein Dreieck $A_g A_k A_m$, von welchem man nun drei Seiten kennt. Bestimme hieraus die Winkel dieses Dreiecks und schließlich unter Berücksichtigung der Form des Vielecks die fraglichen Winkel.

Anmerkung. Für den Fall, daß die drei fehlenden Elemente drei Seiten des Polygons sind, gibt es, wie wir in §. 4 nachgewiesen haben, stets unendlich viele Auflösungen, da die Annahme eines Elementes immer willkührlich bleibt. Von einer weiteren Betrachtung dieses Falles kann also keine Rede sein und in vorstehenden Aufgaben sind somit sämmtliche Fragen erledigt, welche überhaupt in Betreff der fehlenden Stücke eines Polygons in Betracht zu ziehen sind.

Siebenter Abschnitt.

Aufgaben zur Uebung in der Anwendung der vorhergehenden Sätze.

---

1) Wie viel Sieben-, Acht-, Neun-, Zehn-, Elf- und Zwölfecke lassen sich construiren, wenn bezüglich 7, 8, 9, 10, 11 und 12 Punkte als Eckpunkte gegeben sind?

Auflösung: 360 Siebenecke, 2520 Achtecke, 20160 Neunecke, 181440 Zehnecke, 1814400 Elfecke, 19958400 Zwölfecke.

2) Drei Winkel eines Vierecks betragen: 53°, 40° und 331°; wie groß ist der vierte Winkel?

Auflösung: 296°.

3) Sechs Winkel eines Siebeneckes sind 72°, 318°, 63°, 17°, 340° und 42°; wie groß ist der siebente?

Auflösung: 48°.

4) Von einem Neunecke kennt man acht Winkel: 63°, 320°, 332°, 315°, 316°, 345°, 130° und 86°; man soll den neunten Winkel berechnen.

Auflösung: 73°.

5) Sechs Winkel eines Siebeneckes seien: 73°, 90°, 85°, 72°, 76°, und 65°; wie groß ist alsdann der siebente Winkel?

Auflösung: 79°.

6) Die Coordinaten eines Punktes sind: $x = 990'$, $y = 830'$; man soll dieselben in Bezug auf ein anderes Coordinatensystem bestimmen, das mit dem ursprünglichen einerlei Anfangspunkt hat und dessen Abscissenachse mit der alten einen Winkel von 45° bildet.

Auflösung: $\mathfrak{x} = 1286{,}93'$; $\mathfrak{y} = -113{,}13'$.

7) Die Coordinaten eines Punktes seien: $x = 164'$, $y = 118'$. Welche Werthe nehmen dieselben in Bezug auf ein anderes Coordinatensystem an, das mit dem alten einerlei Anfangspunkt hat und dessen Abscissenachse mit der ursprünglichen einen Winkel von 320° bildet?

Auflösung: $\mathfrak{x} = 49{,}79'$; $\mathfrak{y} = 195{,}81'$.

8) Die Coordinaten eines Punktes sind: $x = -175'$, $y = -113'$. Man dreht die Coordinatenachsen um den Anfangspunkt um einen Winkel von 235° und gibt hierauf der Ordinatenachse eine der neuen Lage entgegengesetzte. Wie groß sind die Coordinaten jenes Punktes in Bezug auf die neue Lage der Achsen?

Auflösung: $\mathfrak{x} = 192{,}93'$; $\mathfrak{y} = 78{,}53'$.

9) Die Achsen eines Coordinatensystems werden um den Anfangspunkt um einen Winkel von 333° gedreht. Man soll die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf diese neuen Achsen berechnen, wenn die ursprünglichen Coordinaten $x = -73'$, $y = 84'$ gegeben sind.

Auflösung: $\mathfrak{x} = -103{,}17'$; $\mathfrak{y} = 41{,}7'$.

10) Die Coordinaten eines Punktes sind: $x = 65'$, $y = 70'$. Die Achsen werden aber um 30° gedreht und zugleich so verlegt, daß in Bezug auf das ursprüngliche System die Abscisse des neuen Anfangspunktes $= -50'$ und die Ordinate $= 40'$ wird. Wie groß werden die Coordinaten jenes Punktes hinsichtlich dieser neuen Coordinatenachsen?

Auflösung: $\mathfrak{x} = 114'$; $\mathfrak{y} = -31{,}52'$.

11) Von einem Fünfecke $A_1A_2A_3A_4A_5$ kennt man die Coordinaten der Eckpunkte:

$x_1 = 0$; $y_1 = 0$ — $x_4 = 237'$; $y_4 = 55'$

$x_2 = 55'$; $y_2 = 115'$ — $x_5 = 115'$; $y_5 = -85'$.

$x_3 = 177'$; $y_3 = 55'$

Man soll die Coordinaten der Eckpunkte in Bezug auf die Diagonale A_1A_4 als Abscissenachse und A_1 als Anfangspunkt berechnen.

Auflösung:

$\mathfrak{x}_1 = 0$; $\mathfrak{y}_1 = 0$ — $\mathfrak{x}_4 = 243{,}29'$; $\mathfrak{y}_4 = 0$

$\mathfrak{x}_2 = 73{,}57'$; $\mathfrak{y}_2 = 99{,}64'$ — $\mathfrak{x}_5 = 92{,}8'$; $\mathfrak{y}_5 = -108{,}8'$.

$\mathfrak{x}_3 = 208{,}36'$; $\mathfrak{y}_3 = 114{,}87'$

12) Von einem Achtecke kennt man die Coordinaten der Eckpunkte:

$x_1' = 0$; $y_1 = 0$	$x_5 = 323'$; $y_5 = 0$
$x_2 = 60'$; $y_2 = 122'$	$x_6 = 273'$; $y_6 = -74'$
$x_3 = 130'$; $y_3 = 35'$	$x_7 = 233'$; $y_7 = 27'$
$x_4 = 247'$; $y_4 = 108'$	$x_8 = 135'$; $y_8 = -90'$.

Man soll die Coordinaten der Eckpunkte in Bezug auf die Diagonale A_2A_5 als neue Abscissenachse und A_2 als Anfangspunkt berechnen.

Auflösung:

$\mathfrak{x}_1 = 38{,}4'$; $\mathfrak{y}_1 = -130{,}4'$	$\mathfrak{x}_5 = 276{,}15'$; $\mathfrak{y}_5 = 88{,}31'$
$\mathfrak{x}_2 = 0$; $\mathfrak{y}_2 = 0$	$\mathfrak{x}_6 = 289{,}46'$; $\mathfrak{y}_6 = 0$
$\mathfrak{x}_3 = 110{,}42'$; $\mathfrak{y}_3 = -16{,}6'$	$\mathfrak{x}_7 = 191{,}63'$; $\mathfrak{y}_7 = 47{,}23'$
$\mathfrak{x}_4 = 147{,}09'$; $\mathfrak{y}_4 = 116{,}32'$	$\mathfrak{x}_8 = 150{,}67'$; $\mathfrak{y}_8 = 52{,}97'$.

13) Man kennt von einem 13eck die 12 Winkel:

$A_1 = 152^0$	$A_5 = 108^0$	$A_9 = 307^0$
$A_2 = 54^0$	$A_6 = 282^0$	$A_{10} = 62^0$
$A_3 = 300^0$	$A_7 = 74^0$	$A_{11} = 102^0$
$A_4 = 58^0$	$A_8 = 75^0$	$A_{12} = 300^0$.

Wie groß ist der Winkel A_{13} und welches sind die Azimuthe der aufeinanderfolgenden Seiten in Bezug auf die Seite A_1A_{13}?

Auflösung: $\measuredangle A_{13} = 286^0$.

$\alpha_1 = 152^0$	$\alpha_5 = 312^0$	$\alpha_9 = 330^0$
$\alpha_2 = 26^0$	$\alpha_6 = 54^0$	$\alpha_{10} = 212^0$
$\alpha_3 = 146^0$	$\alpha_7 = 308^0$	$\alpha_{11} = 134^0$
$\alpha_4 = 24^0$	$\alpha_8 = 203^0$	$\alpha_{12} = 254^0$.

14) Von einem Siebeneck $A_1A_2 \ldots A_7$ kennt man

die Seiten:	die Winkel:
$A_1A_2 = s_1 = 370'$	$A_2 = 197^0\ 3'\ 0{,}08''$
$A_2A_3 = s_2 = 904'$	$A_3 = 97^0\,37'\,41{,}34''$
$A_3A_4 = s_3 = 56'$	$A_4 = 81^0\,49'\,43{,}56''$
$A_4A_5 = s_4 = 394'$	$A_5 = 188^0\,10'\,16{,}44''$
$A_5A_6 = s_5 = 1221'$	$A_6 = 9^0\,31'\,38{,}22''$.
$A_6A_7 = s_6 = 419'$	

Man soll die Coordinaten der Eckpunkte in Bezug auf A_1A_7 als Abscissenachse und A_1 als Anfangspunkt, sowie den Inhalt des Polygons berechnen.

Auflösung:

$x_2 = 208'$; $y_2 = 306'$
$x_3 = 474{,}648'$; $y_3 = 1169{,}78'$
$x_4 = 529{,}875'$; $y_4 = 1160{,}527'$
$x_5 = 410{,}096'$; $y_5 = 785{,}175'$
$x_6 = 208'$; $y_6 = 419'$
$x_7 = 208'$; $y_7 = 0$.

Inhalt = 139402 □ Fuß = 3 Morg. 1 Vtl. 94 □.Ruth. 2 □.Fuß.

15) Von einem Fünfecke $A_1A_2..A_5$ kennt man

die Seiten:	die Winkel:
$A_1A_2 = 122'$	$A_1 = 88^\circ 58' 3{,}62''$
$A_2A_3 = 290'$	$A_2 = 89^\circ \ 8' 18{,}33''$
$A_3A_4 = 148'$	$A_3 = 151^\circ 32' 53{,}06''$.
$A_5A_1 = 606'$	

Man soll die Seite A_4A_5, sowie die Winkel A_4 und A_5 und den Inhalt berechnen.

Auflösung: $A_4A_5 = 190'$; $\sphericalangle A_4 = 198^\circ 55' 28{,}72''$; $\sphericalangle A_5 = 11^\circ 25' 16{,}27''$; Inhalt = 47184 □. Fuß.

16) Den Inhalt des Fünfecks $A_1A_2..A_5$ zu bestimmen, wenn gemessen wurde:

$A_1A_2 = s_1 = 414'$	$\sphericalangle A_1 = 145^\circ \ 8' 25{,}2''$
$A_2A_3 = s_2 = 312'$	$\sphericalangle A_2 = 22^\circ 37' 11{,}5''$
$A_3A_4 = s_3 = 161'$	$\sphericalangle A_3 = 157^\circ 22' 48{,}5''$
$A_4A_5 = s_4 = 85'$	$\sphericalangle A_4 = 147^\circ 28' 46{,}4''$.

Auflösung: Inhalt = 39600 □. Fuß.

17) Von einem Sechsecke $A_1A_2...A_6$ kennt man

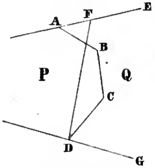
die Seiten:	die Winkel:
$s_1 = 193'$	$A_2 = 172^\circ 37' \ 2{,}02''$
$s_2 = 4272'$	$A_3 = 59^\circ 29' 23{,}14''$
$s_3 = 3702{,}4'$	$A_4 = 90^\circ$
$s_4 = 2776{,}8'$	$A_5 = 157^\circ 22' 48{,}48''$.
$s_5 = 1424'$	

Man soll die Seite $A_6A_1 = s_6$, die Winkel A_1 und A_6, so wie den Inhalt berechnen.

Auflösung: $s_6 = 905'$; $\sphericalangle A_1 = 144^\circ 29' 14{,}28''$; $\sphericalangle A_6 = 96^\circ 1' 32''$; Inhalt = 9753638 □. Fuß.

18) Die beiden Grundstücke P und Q (Fig. 30) haben die gebrochene Grenze ABCD gemeinschaftlich. Man soll dieselbe von D aus rectificiren, d. h. so in eine Gerade DF verwandeln, daß die Inhalte von P und Q unverändert bleiben.

Fig. 30.



Gemessen wurde:

AB = 183,4′ ∢ EAB = 53° 18′
BC = 127,3′ ∢ ABC = 119° 48′
CD = 112,8′ ∢ BCD = 138° 46′

Wo fällt die neue Grenze DF hin?

Auflösung: Setzt man den Inhalt des Fünfecks ABCDF = Null, so folgt:

$$CD\,[BC \sin C - AB \sin (C+B) + AF \sin (C+B+A)] + BC\,[AB \sin B - AF \sin (B+A)] + AB\,.\,AF \sin A = 0$$

und hieraus AF = 160,66′.

19) Von einem Zwölfeck $A_1 A_2 \ldots A_{12}$ kennt man

die Seiten:		die Winkel:	
$s_1 = 1350'$	$s_7 = 1384'$	$A_1 = 167° 25'$	$A_7 = 127° 15'$
$s_2 = 1275'$	$s_8 = 776'$	$A_2 = 154° 28'$	$A_8 = 222° 10'$
$s_3 = 809'$	$s_9 = 1228'$	$A_3 = 139° 53'$	$A_9 = 73° 31'$
$s_4 = 925'$	$s_{10} = 2234'$	$A_4 = 125° 7'$	$A_{10} = 185° 25'$
$s_5 = 637'$	$s_{11} = 2201{,}42'$	$A_5 = 280° 37'$	$A_{11} = 138° 32'$
$s_6 = 1467'$	$s_{12} = 2190{,}28'$	$A_6 = 93° 12'$	$A_{12} = 92° 25'$

Man soll die Coordinaten der Eckpunkte in Bezug auf die Seite $A_1 A_{12}$ als Abscissenachse und A_1 als Anfangspunkt, sowie den Inhalt der Figur berechnen.*)

Auflösung:

$x_1 = 0$; $y_1 = 0$
$x_2 = -1317{,}57'$; $y_2 = +294{,}11'$
$x_3 = -2320{,}68'$; $y_3 = +1081{,}12'$
$x_4 = -2485{,}66'$; $y_4 = +1873{,}12'$
$x_5 = -1853{,}44'$; $y_5 = +2548{,}34'$

*) Aus Schiereck's Polygonometrie.

$x_6 = -2390{,}68'$; $y_6 = +2890{,}60'$
$x_7 = -1672{,}76'$; $y_7 = +4169{,}93'$
$x_8 = -\ \ 302{,}06'$; $y_8 = +4361{,}35'$
$x_9 = +\ \ 195{,}53'$; $y_9 = +4956{,}81'$
$x_{10} = +\ \ 875{,}69'$; $y_{10} = +3934{,}38'$
$x_{11} = +2283{,}11'$; $y_{11} = +2199{,}46'$
$x_{12} = +2190{,}28$,; $y_{12} = 0$.

Inhalt = 16747211,75 D.Fuß = 418 Morg. 2 Vtl. 72 D.Ruth. 11 D.Fuß 75 D.Zoll.

20) Der Umfang eines Waldes bildet ein 29eck. Man hat gemessen:

die Seiten:	die Winkel:
$s_1 = 112'$	$A_1 = \ 65°\ 49'\ \ 1{,}2''$
$s_2 = 221{,}2'$	$A_2 = 180°\ \ 5'\,56{,}4''$
$s_3 = 155{,}4'$	$A_3 = 183°\,41'\,24{,}0''$
$s_4 = 180{,}4'$	$A_4 = 176°\,54'\,14{,}4''$
$s_5 = 158{,}9'$	$A_5 = 173°\,13'\,55{,}2''$
$s_6 = 119{,}3'$	$A_6 = 178°\,33'\,36{,}0''$
$s_7 \doteq 53'$	$A_7 = 131°\,45'\,36{,}0''$
$s_8 = 117'$	$A_8 = 204°\,14'\,45{,}6''$
$s_9 = 98{,}9'$	$A_9 = 187°\,24'\,25{,}2''$
$s_{10} = 100{,}8'$	$A_{10} = 188°\ \ 2'\,45{,}6''$
$s_{11} = 100{,}8'$	$A_{11} = 187°\,36'\,50{,}4''$
$s_{12} = 120{,}4'$	$A_{12} = 189°\,35'\,38{,}4''$
$s_{13} = 82'$	$A_{13} = 188°\,23'\,49{,}2''$
$s_{14} = 166{,}8'$	$A_{14} = 178°\ \ 7'\,40{,}8''$
$s_{15} = 102{,}6'$	$A_{15} = 176°\,43'\,58{,}8''$
$s_{16} = 76{,}1'$	$A_{16} = 179°\,43'\,48{,}0''$
$s_{17} = 92{,}1'$	$A_{17} = 186°\,34'\,12{,}0''$
$s_{18} = 70{,}4'$	$A_{18} = 176°\,58'\ \ 1{,}2''$
$s_{19} = 90{,}7'$	$A_{19} = 189°\,39'\,57{,}6''$
$s_{20} = 263{,}3'$	$A_{20} = \ 21°\,16'\,33{,}6''$
$s_{21} = 184'$	$A_{21} = 155°\,38'\,45{,}6''$
$s_{22} = 295{,}4'$	$A_{22} = 181°\,33'\,57{,}6''$
$s_{23} = 270{,}3'$	$A_{23} = 175°\,57'\,0{,}00''$
$s_{24} = 250{,}6'$	$A_{24} = 180°\,30'\,14{,}4''$
$s_{25} = 415{,}2'$	$A_{25} = 164°\,46'\,19{,}2''$

die Seiten:	die Winkel:
s_{26} = 321,4′	A_{26} = 191° 29′ 2,4″
s_{27} = 100,5′	A_{27} = 108° 28′ 4,8″
s_{28} = 243′	A_{28} = 177° 23′ 24,0″
s_{29} = 234,1′	A_{29} = 179° 47′ 2,4″.

Man soll die Coordinaten der Eckpunkte in Bezug auf s_{29} als Abscissenachse und A_1 als Anfangspunkt, sowie den Inhalt des Waldes berechnen.

Auflösung:

x_1 = 0;	y_1 = 0	x_{16} = 895,8′;	y_{16} = 1602,9′
x_2 = 45,9′;	y_2 = 102,1′	x_{17} = 921,6′;	y_{17} = 1674,4′
x_3 = 136,1′;	y_3 = 304,1′	x_{18} = 942,6′;	y_{18} = 1764,0′
x_4 = 190,1′;	y_4 = 449,7′	x_{19} = 962,4′;	y_{19} = 1831,5′
x_5 = 262,1′;	y_5 = 615,1′	x_{20} = 973,4′;	y_{20} = 1921,6′
x_6 = 342,2′;	y_6 = 752,3′	x_{21} = 1039,1′;	y_{21} = 1666,9′
x_7 = 404,8′;	y_7 = 853,8′	x_{22} = 1007,0′;	y_{22} = 1485,8′
x_8 = 456,8′;	y_8 = 863,1′	x_{23} = 964,2′;	y_{23} = 1193,8′
x_9 = 553,3′;	y_9 = 928,9′	x_{24} = 906,0′;	y_{24} = 929,9′
x_{10} = 627,1′;	y_{10} = 994,6′	x_{25} = 854,3′;	y_{25} = 684,8′
x_{11} = 692,1′;	y_{11} = 1071,5′	x_{26} = 664,7′;	y_{26} = 315,4′
x_{12} = 746,8′;	y_{12} = 1156,3′	x_{27} = 577,9′;	y_{27} = 5,9′
x_{13} = 793,4′;	y_{13} = 1267,3′	x_{28} = 477,5′;	y_{28} = 0,9′
x_{14} = 814,0′;	y_{14} = 1346,6′	x_{29} = 234,3′;	x_{29} = 0.
x_{15} = 861,2′;	y_{15} = 1506,4′		

Inhalt = 650959 □. Fuß = 16 Morg. 1 Vtl. 9 □. Ruth. 59 □. Fuß.

21) Von einem Walde, dessen Umfang ein 31eck bildet, wurden gemessen:

die Seiten	die Winkel
s_1 = 151,7′	A_1 = 128° 40′ 55,2″
s_2 = 133,5′	A_2 = 190° 21′ 32,4″
s_3 = 102,6′	A_3 = 171° 1′ 37,2″
s_4 = 173,6′	A_4 = 167° 33′ 10,8″
s_5 = 102,8′	A_5 = 58° 20′ 16,8″
s_6 = 85,0′	A_6 = 168° 55′ 48,0″
s_7 = 166,7′	A_7 = 183° 52′ 12,0″
s_8 = 146,6′	A_8 = 228° 55′ 58,8″

die Seiten:	die Winkel:
s_9 = 103,0′	A_9 = 180° 5′56,4″
s_{10} = 159,1′	A_{10} = 157° 19′44,4″
s_{11} = 130,2′	A_{11} = 185° 5′38,4″
s_{12} = 160,0′	A_{12} = 147° 38′42,8″
s_{13} = 267,3′	A_{13} = 196° 25′30,0″
s_{14} = 22,8′	A_{14} = 94° 55′55,2″
s_{15} = 120,8′	A_{15} = 184° 30′32,4″
s_{16} = 127,3′	A_{16} = 189° 59′56,4″
s_{17} = 150,9′	A_{17} = 188° 41′38,4″
s_{18} = 167,1′	A_{18} = 234° 9′43′2″
s_{19} = 151,7′	A_{19} = 198° 13′30,0″
s_{20} = 43,2′	A_{20} = 180° 11′20,4″
s_{21} = 49,3′	A_{21} = 41° 26′ 9,6″
s_{22} = 149,5′	A_{22} = 164° 25′15,6″
s_{23} = 190,6′	A_{23} = 163° 8′34,8″
s_{24} = 150,5′	A_{24} = 169° 54′39,6″
s_{25} = 94,0′	A_{25} = 179° 9′46,8″
s_{26} = 114,9′	A_{26} = 163° 31′48,0″
s_{27} = 127,0′	A_{27} = 181° 21′32,4″
s_{28} = 111,6′	A_{28} = 180° 11′52,8″
s_{29} = 234,9′	A_{29} = 180° 50′45,6″
s_{30} = 121,8′	A_{30} = 180° 16′12,0″
s_{31} = 160,6′	A_{31} = 180° 43′44,4″.

Das Azimuth der Seite s_1 beträgt 236° 10′ 40,8″. Man soll die Coordinaten in Bezug auf A_1 als Anfangspunkt und den Flächeninhalt berechnen.

Auflösung:

x_1 = 0;	y_1 = 0
x_2 = — 84,3′;	y_2 = — 125,7′
x_3 = —137,3′;	y_3 = —2478,0′
x_4 = —192,2′;	y_4 = — 334,5′
x_5 = —314,3′;	y_5 = — 457,5′
x_6 = —338,1′;	y_6 = — 357,9′
x_7 = —341,7′;	y_7 = — 273,0′
x_8 = —359,7′;	y_8 = — 107,5′
x_9 = —479,8′;	y_9 = — 23,8′
x_{10} = —564,4′;	y_{10} = + 34,7′

x_{11}	$= -650{,}0'$;	y_{11}	$= +\ 168{,}5'$
x_{12}	$= -729{,}5'$;	y_{12}	$= +\ 271{,}4'$
x_{13}	$= -744{,}1'$;	y_{13}	$= +\ 431{,}0'$
x_{14}	$= -843{,}1'$;	y_{14}	$= +\ 679{,}5'$
x_{15}	$= -822{,}7'$;	y_{15}	$= +\ 689{,}7'$
x_{16}	$= -719{,}2'$;	y_{16}	$= +\ 752{,}3'$
x_{17}	$= -623{,}1'$;	y_{17}	$= +\ 836{,}2'$
x_{18}	$= -525{,}6'$;	y_{18}	$= +\ 951{,}5'$
x_{19}	$= -566{,}1'$;	y_{19}	$= +1113{,}7'$
x_{20}	$= -646{,}7'$;	y_{20}	$= +1242{,}2'$
x_{21}	$= -669{,}9'$;	y_{21}	$= +1278{,}7'$
x_{22}	$= -622{,}4'$;	y_{22}	$= +1265{,}2'$
x_{23}	$= -\ 495{,}0'$;	y_{23}	$= +1186{,}8'$
x_{24}	$= -368{,}4'$;	y_{24}	$= +1044{,}4'$
x_{25}	$= -290{,}0'$;	y_{25}	$= +\ 916{,}1'$
x_{26}	$= -242{,}3'$;	y_{26}	$= +\ 835{,}1'$
x_{27}	$= -214{,}3'$;	y_{27}	$= +\ 723{,}8'$
x_{28}	$= -180{,}3'$;	y_{28}	$= +\ 601{,}6'$
x_{29}	$= -150{,}1'$;	y_{29}	$= +\ 494{,}3'$
x_{30}	$= -\ 83{,}4'$;	y_{30}	$= +\ 269{,}3'$
x_{31}	$= -\ 48{,}2'$;	y_{31}	$= +\ 152{,}9'$.

Inhalt = 674752 □.Fuß = 16 Morg. 3 Vtl. 47 □.Rth. 52 □.Fuß.

22) Von einem Walde, dessen Umfang ein 26 Eck bildet, kennt man

die Seiten:	die Winkel:
$s_1 = 251{,}9'$	$A_1 = 272^\circ 34' 58{,}8''$
$s_2 = 233{,}6'$	$A_2 = 175^\circ 43' 30{,}0''$
$s_3 = 201{,}0'$	$A_3 = 182^\circ 06' 54{,}0''$
$s_4 = 93{,}7'$	$A_4 = 180^\circ 57' 46{,}8''$
$s_5 = 206{,}0'$	$A_5 = 81^\circ 30' 14{,}4''$
$s_6 = 70{,}6'$	$A_6 = 173^\circ 06' 54{,}0''$
$s_7 = 58{,}2'$	$A_7 = 174^\circ 50'\ 2{,}4''$
$s_8 = 47{,}4'$	$A_8 = 154^\circ 13' 58{,}8''$
$s_9 = 77{,}7'$	$A_9 = 136^\circ 49' 37{,}2''$
$s_{10} = 138{,}1'$	$A_{10} = 161^\circ 00'\ 3{,}6''$
$s_{11} = 77{,}0'$	$A_{11} = 194^\circ 00' 14{,}4''$
$s_{12} = 90{,}1'$	$A_{12} = 189^\circ 46' 58{,}8''$

die Seiten:	die Winkel:
$s_{13} = 101,1'$	$A_{13} = 191^\circ\ 6'21,6''$
$s_{14} = 69,1'$	$A_{14} = 187^\circ 50'52,8''$
$s_{15} = 146,6'$	$A_{15} = 155^\circ 18'46,8''$
$s_{16} = 104,7'$	$A_{16} = 179^\circ 57'18,0''$
$s_{17} = 96,2'$	$A_{17} = 186^\circ 38'31,2''$
$s_{18} = 95,7'$	$A_{18} = 181^\circ 54'28,8''$
$s_{19} = 98,8'$	$A_{19} = 89^\circ 19'30,0''$
$s_{20} = 130,0'$	$A_{20} = 180^\circ 10'48,0''$
$s_{21} = 162,9'$	$A_{21} = 191^\circ\ 7'58,8''$
$s_{22} = 119,0'$	$A_{22} = 180^\circ 46'58,8''$
$s_{23} = 115,6'$	$A_{23} = 83^\circ 16'37,2''$
$s_{24} = 138,0'$	$A_{24} = 179^\circ 45'57,6''$
$s_{25} = 179,1'$	$A_{25} = 168^\circ 27'10,8''$
$s_{26} = 141,9'$	$A_{26} = 87^\circ 37'26,4''$.

Das Azimuth der Seite s_1 beträgt $279^\circ\ 39'\ 57,6''$. Man soll die Coordinaten in Bezug auf A_1 als Anfangspunkt, sowie den Inhalt des Waldes berechnen.

Auflösung:

$x_1 = 0;$	$y_1 = 0$	$x_{14} = -324,7';$	$y_{14} = -254,3'$
$x_2 = +\ 42,3';$	$y_2 = -248,3'$	$x_{15} = -362,0';$	$y_{15} = -196,1'$
$x_3 = +\ 64,0';$	$y_3 = -480,9'$	$x_{16} = -382,5';$	$y_{16} = -\ 51,0'$
$x_4 = +\ 90,1';$	$y_4 = -680,2'$	$x_{17} = -397,1';$	$y_{17} = +\ 52,7'$
$x_5 = +103,5';$	$y_5 = -772,9'$	$x_{18} = -421,4';$	$x_{18} = +145,7'$
$x_6 = -102,8';$	$y_6 = -772,8'$	$x_{19} = -448,6';$	$y_{19} = +237,5'$
$x_7 = -173,0';$	$y_7 = -764,2'$	$x_{20} = -353,8';$	$y_{20} = +264,6'$
$x_8 = -230,0';$	$y_8 = -752,2'$	$x_{21} = -229,1';$	$y_{21} = +300,4'$
$x_9 = -267,4';$	$y_9 = -723,1'$	$x_{22} = -\ 84,5';$	$y_{22} = +374,8'$
$x_{10} = -279,4';$	$y_{10} = -646,3'$	$x_{23} = +\ 20,3';$	$y_{23} = +430,5'$
$x_{11} = -255,5';$	$y_{11} = -510,4'$	$x_{24} = +\ 62,0';$	$y_{24} = +322,8'$
$x_{12} = -260,8';$	$y_{12} = -433,5'$	$x_{25} = +111,3';$	$y_{25} = +194,0'$
$x_{13} = -282,2';$	$y_{13} = -346,0'$	$x_{26} = +141,0';$	$y_{26} = +\ 17,4'$.

Inhalt = 447586 Q.Fuß = 11 Morg. 75 Q.Ruth. 86 Q.Fuß.

Gedruckt bei E. Polz in Leipzig.